Nº 53

INTRODUCCION

No es la pretensión de este trabajo el considerar de manera rigurosamente formalista todas las cuestiones relativas al cálculo proposicional, sino dar una idea práctica de "qué es" y cómo se opera en él: así, no se tratarán sino muy por encima las cuestiones, importantes desde el punto de vista del rigor, aunque no desde el de la práctica, referentes a la completitud, independencia y consistencia.

Pasamos seguidamente a dar las nociones preliminares imprescindibles para la comprensión de las páginas siguientes:

- Distinción semántica y sintaxis: dada la teoría T sobre un universo U como un lenguaje L, llamamos metateoría T'a la teoría cuyo universo U' es el lenguaje L de T. En el caso de que se estudie U', como la relaciones entre sus elementos, prescindiendo de que hablen de U, nos hallamos ante una consideración de carácter sintáctico; en el caso contrario, decimos que consideramos a U' desde el punto de vista semántico (1).
- Forma lógica es "el conjunto de nexos que organizan una demostración, cuando se prescinde de los "contenidos" semánticos del discurso" (2).
- Sobre las nociones de implicación e inferencia, bastante evidentes por sí mismas, diremos que, mientras la primera, objeto de la lógica, reviste carácter sintáctico, la segunda lo tiene semántico.

\- - - - - -

EL CALCULO PROPOSICIONAL O DE ENUNCIADOS

1.- El problema de la axiomatización de la lógica.

El objeto de la lógica formal son las estructuras de los discursos. Logra afirmaciones siempre verdaderas (del tipo "si A = B y B = C, entonces A = C", y no "A = B", cuya verdad o falsedad podrá variar según la interpretación dada a A ó a B) (3).

Es importante la distinción entre ley y regla lógica:

- "La ley lógica intenta expresar algo que es de una determinada manera" (4).

- "La regla lógica indica cómo se puede proceder para pasar de una o más proposiciones a otra" (5).

Para axiomatizar la lógica, nos hará falta:

- Seleccionar algunas leyes como primitivas (axiomas).
- Establecer reglas para obtener otras leyes lógicas. (6)

El simbolismo usado en el trabajo es el de la escuela polaca (de Lukasiewicz), que difiere por razones de comodidad tipográfica del empleado en el texto.

<u>Elementos constitutivos de la lógica proposicional.</u>

Toda proposición (7) consta de términos. Estos pueden dividirse en categoremáticos - tienen significado propio y autónomo - y sincategoremáticos -no tienen significado propio ni autónomo. Se llaman también conectores u operadores lógicos (tal la palabra "y" o la palabra "pero").- Se pueden encadenar proposiciones mediante términos sincategoremáticos: dadas las frases "Juan es rubio" y "Juan tiene quince años", podemos obtener, por ejemplo, las siguientes:

Juan es rubio Y Juan tiene quince años.
Juan es rubio O Juan tiene quince años.
SI Juan es rubio, ENTONCES Juan tiene quince años.
Juan es rubio SI Y SOLO SI Juan tiene quince años.
Juan NO es rubio.
Juan NO tiene quince años.

Podemos representar cada proposición por una letra del alfabeto: llamando a "Juan tiene quince años" <u>q</u> y a "Juan es rubio" <u>p</u>, las proposiciones anteriores quedan como sigue: <u>p</u> Y <u>q</u>; <u>p</u> O <u>q</u>; SI p ENTONCES q; p SI Y SOLO SI q; NO p; NO q, que convenimos arbitrariamente en designar, de ahora en adelante, respectivamente, por Kpq, Apq, Cpq, Epq, Np, Nq.

Obsérvese que hubiésemos podido proceder análogamente con otro par cualquiera de proposiciones.

Véase también que cada una de las proposiciones obtenidas es a su vez una nueva proposición, que puede ser unida a otra mediante otro conector: la frase "Si Juan es rubio y Juan tiene quince años, entonces Juan es rubio", que afirma "SI Kpq, ENTONCES p", se representaría simbólicamente CKpqp. Resumiendo:

Notación	Denominación	Significado
Kpq	Conjunción	p Y q
Apq	Alternativa	p O q
Cpq	Condicional	SI p, ENTONCES q
Epq	Bicondicional	p SI Y SOLO SI q
Np (Nq)	Negación	NO p (NO q) (8)

2.- Las funciones de verdad.

Toda proposición, por definición, puede ser-tomar los valores de- verdadera o falsa. Llamamos a "verdadero" y a "falso" valores de verdad. El valor de verdad de una proposición molecular -llamamos molecular a toda proposición que consta de más de una letra minúscula- está en función de los valores de verdad de las proposiciones simples integrantes, llamadas variables.

Ejemplo: dadas dos proposiciones p y q, la proposición Kpq sólo es verdadera si lo son p y q. Esquematizándolo:

p	q	Kpq
Verdadero	verdadero	verdadero
Falso	verdadero	falso
Verdadero	falso	falso
Falso	falso	falso

Llamando, para abreviar, "1" a "verdadero" y "0" a "falso", el esquema anterior queda como sigue:

p	q	Kpq
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

Podemos hacer lo mismo con los demás conectores, obteniendo:

p	q	Kpq	Apq	Cpq	Epq
1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
0	0	0	0	1	1

p	Np
1	0
0	1

(9)

Para hallar la función de verdad de expresiones más complejas, por ejemplo NCKpqEpNq, empezamos estableciendo una valoración de las variables, cuidando de no olvidar ninguna de las combinaciones posibles de valores de verdad-falsedad entre las variables:

p	q	NCKpqEpNq
1	1	11 1 1
0	1	01 0 1
1	0	10 1 0
0	0	00 0 0

asignamos luego, según las tablas de verdad dadas, valores a las proposiciones inmediatas a p y q, esto es, a Kpq y a Nq:

p	q	NCKpqEpNq
1	1	111 101
0	1	001 001
1	0	010 110
0	0	000 010

pasamos seguidamente a hallar el valor de EpNq, recordando que los valores que usemos han de ser los colocados bajo p y N:

p	q	NCKpqEpNq
1	1	1110101
0	1	0011001
1	0	0101110
0	0	0000010

procediendo de igual manera con las demás constantes (Llamamos constantes a las letras mayúsculas)(10), obtenemos:

p	q	NCKpqEpNq
1	1	101110101
0	1	010011001
1	0	010101110
0	0	010000010

nótese que vamos situando los valores de verdad progresivamente bajo las constantes según su radio de acción.(De menor a mayor)(11)

El valor de verdad de la expresión, colocado bajo la N, es 1,0,0,0.

Se pueden hallar correspondencias entre funciones de verdad que ofrezcan a cada combinación de valores de las variables el mismo valor. Observamos que la función NKNqp toma los mismos valores que Cpq. Podemos, pues, escribir, y establecemos por definición: Df. Cpq=NKNqp (12)(13)(14).

3.- El problema de la decisión

Existen proposiciones siempre verdaderas: por ejemplo, ApNp, que vale siempre 1. Estas son precisamente las leyes lógicas.(15)

El problema de la decisión estriba en el hallazgo de un procedimiento mecánico capaz de determinar si una expresión dada es ley lógica o no. Como procedimientos fundamentales cabe citar el uso de las tablas de verdad y la reducción a la forma normal con-

4.- La deducción al nivel de la lógica proposicional.(17)

Nos hallamos ante la necesidad de encontrar un método que nos permita deducir de unas leyes lógicas tomadas como axiomas todas las demás. Un procedimiento sencillo es el siguiente:

-Damos una serie de fórmulas primitivas (FP)(leyes evidentes y comprobables):

FP 1	NKpNp	FP 10	CqApq
FP 2	Cpp	FP 11	ECpqANpq
FP 3	ApNp	FP 12	ECpqNKpNq
FP 4	ENNpp	FP 13	EKpqNANpNq
FP 5	ECpqCqp	FP 14	EApqNKNpNq
FP 6	EApqAqp	FP 15	ECpqCNqNp
FP 7	CKpqp	FP 16	CKCpqCqrCpr
FP 8	CKpqq	FP 17	CKCpqpq
FP 9	CpApq		

-Damos igualmente las siguientes reglas:

I- Es lícito substituir en cualquier fórmula una expresión que figure en ella por otra expresión unida en alguna FP a la primera mediante el bicondicional. La fórmula obtenida no difiere de la original en lo que respecta a los valores de verdad.

II- Si se obtiene un condicional Cpq (p y q representan proposiciones no necesariamente atómicas), y también se obtiene p, se puede considerar como cierto q.

5.- Expresión axiomática pura.

Es necesario antes de la exposición axiomática aclarar los conceptos de:(18)

-Derivabilidad. Derivable es toda expresión obtenible de otras mediante unas reglas.

-Demostrabilidad. Demostrable es toda expresión que no necesita de otras para ser afirmada.

Esto en el plano sintáctico. En el semántico:

-Consecuencia lógica(Equivalente a deriv demostrabilidad). Una expresión es consecuencia lógica de otras básicas si cualquier interpretación dada a las básicas la satisface.

-Validez.(demostrabilidad). Válida es toda expresión que no necesita ser consecuencia de otras para ser afirmada.

Son interesantes también las nociones de cálculo y lenguaje formalizado:

- Se llama cálculo a un conjunto de proposiciones obtenidas de unos axiomas por la relación de derivabilidad.

- Se llama lenguaje formalizado a un conjunto de proposiciones obtenidas de otras por la relación de consecuencia lógica.

Expresión axiomática pura(19)

SIGNOS:

-Variables: p,q,r,s,..., con subíndices si es necesario.

-Constantes: N,A

EXPRESIONES:

Fórmula es cualquier alineación horizontal de signos. Sólo nos interesan las "fórmulas bien formadas"(FBF) o expresiones, cuyo conjunto queda definido mediante las siguientes "reglas de formación"(RF):

RF 1.- Cualquier variable es una FBF.

RF 2.- N seguido de una FBF es una FBF.

RF 3.- A seguido de dos FFBBFF es una FBF,

RF 4.- Nada más es una FBF.

AXIOMAS(A):

A 1.- ANAppp

A 2.- ANpApq

A 3.- ANApqAqp

A 4.- ANANqrANApqApr

REGLAS DE INFERENCIA(RI):

RI 1.-Regla de substitución uniforme:"en cualquier fórmula derivable cualquier variable puede ser substituida por cualquier FBF, mientras la substitución se verifique en todos los lugares en que dicha variable aparezca en la fórmula. La fórmula obtenida es, a su vez, derivable"(20)

RI 2.-Regla de separación:"si P es una fórmula derivable del sistema y también lo es ANPQ, entonces Q es otra fórmula derivable"(21).

DEFINICIONES AUXILIARES(D):

D1.- Df. Kpq=NANpNq

D2.- Df. Cpq=ANpq

D3.- Df. Epq=KCpqCqp

Ejemplo de demostración(Nos servimos de la tesis ANpp para abreviar, aún sin demostrarla):

(1) ANApp p=A1

(2) ANApqAqp=A3

(2)p/NApp,q/p=(3) , o sea por RI 1

(3) ANANApppApNApp

(3)=AN(1)(4), o sea por RI 2

(4) ApNApp

(4)p/Np=(5)

(5) ANpNANpNp

(5)p/ANpp=(6)

(6) ANANppNANANppNaNpp

(7) ANpp=Tesis

(6)=AN(7)(8)

(8) NANANppNANpp

(8)p/NANpNq=(9)

(9) NANANNANpNqNANpNqNANNANpNqNANpNq

Aplicando repetidamente D1, D2 y D3 a (9), obtenemos:

EKpqNANpNq

CUESTIONES METATEORETICAS

6.- Los problemas metateoréticos fundamentales del cálculo proposicional en forma axiomática.(22)

Son los relativos a la completitud, consistencia y independencia:

- Un sistema es sintácticamente consistente cuando en él es imposible derivar una expresión cualquiera.

- Un sistema es semánticamente consistente si sus expresiones admiten un modelo.

-Un sistema es sintácticamente completo si se hace inconsistente al añadir a sus axiomas una expresión cualquiera no demostrable.

- Un sistema es semánticamente completo si todas sus expresiones válidas son demostrables

- Los axiomas de un sistema son independientes cuando ninguno de ellos puede ser obtenido como teorema a partir de los restantes.

7.- Prueba sintáctica de la consistencia(23):

Convenimos en que a cualquier variable puede serle asignado uno de los dos valores 0 o 1(24). Asignamos a las constantes las siguientes funciones:

p	q	Apq
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

p	Np
1	0
0	1

Haciendo los cálculos, observamos que todos los axiomas valen 1. Surge la pregunta: ¿que valor pueden tener las tesis?. Para contestarla es necesario formular los siguientes lemas:

Lema 1.- Todo axioma vale siempre y solo 1 (Calcúlese)

Lema 2.- Si p vale siempre y solo 1, también vale siempre y solo 1 cualquier expresión obtenida a partir de ella por RI 1. En efecto, pues el valor de conjunto es independiente del de las variables(FFBBFF).

Lema 3.- Si p y ANpq son expresiones que valen siempre y solo 1, entonces q también vale siempre y solo 1. En efecto: si q valiera 0, al ser siempre p=1, sería AN10=0, por ser N1=0 y A00=0, contra lo supuesto de que sea siempre y solo ANpq=1.

Pasamos seguidamente a demostrar:

- Si la deducción por la que hemos obtenido la tesis está formada por una sola expresión, esta ha de ser un axioma, siempre verdadero en virtud del lema 1.

-Si la deducción consta de n+1 expresiones de las cuales las n primeras valen siempre y solo 1, la (n+1)-ésima ha de ser o un axioma, siempre verdadero por lema 1, o una expresión obtenida a partir de las otras por alguna de las reglas de inferencia:

en el primer caso(Deducida por RI 1), vale siempre y solo 1 en virtud del lema 2

en el segundo caso, vale siempre y solo 1 en virtud del lema 3.

Al existir expresiones que no valen siempre 1, podemos decir que el cálculo proposicional es consistente sintácticamente por existir expresiones no deribables de los axiomas.

8.- Prueba de la independencia de los axiomas del cálculo proposicional.(24)

El método a seguir para establecer la independencia de los axiomas es el siguiente: se definen las funciones de las constantes, se valoran las variables y se demuestra que tres axiomas toman ciertos valores distintos de los que, al menos en un caso, toma el restante, de donde el axioma no es deducible de los otros tres. Las valoraciones de las variables son:

-Para la independencia de A1:

p	Np
[illegible]	[illegible]
[illegible]	[illegible]
2	1

Apq	q: 0	1	2
p 0	0	0	0
p 1	0	1	2
p 2	0	0	0

-Para A2:

p	Np
0	2
1	1
2	0

Apq	q: 0	1	2
p 0	0	0	0
p 1	0	1	2
p 2	0	2	2

-Para A3:

p	Np
0	1
1	0
2	0
3	2

Apq	q: 0	1	2	3
p 0	0	0	0	0
p 1	0	1	2	3
p 2	0	2	2	0
p 3	0	3	3	3

-Para A4:

p	Np
0	1
1	0
2	3
3	0

Apq	q: 0	1	2	3
p 0	0	0	0	0
p 1	0	1	2	3
p 2	0	2	2	0
p 3	0	3	0	3

9.- Prueba de la completitud sintáctica del cálculo proposicional(25)

Explicaremos previamente, como habíamos indicado antes, la reducción de una expresión cualquiera a la forma normal conjuntiva(FNC):

si en una expresión se substituye una subexpresión suya por otra equivalente, la expresión total que resulta es equivalente a la original. Consideramos dos expresiones p y q equivalentes cuando es demostrable Epq. Es evidente que mediante esas substituciones podemos ir haciendo desaparecer de una fórmula los conectores hasta obtener una expresión que sea conjunción de varias subexpresiones que sean a su vez alternativas de variables negadas o no. A esa expresión se le llama FNC de la fórmula primera.

Por ejemplo: la fórmula KCpqq, en forma normal conjuntiva sería KANpqq

Las formas normales conjuntivas tienen las siguientes pro-

- Una expresión en FNC es derivable si y solo si lo son sus alternativas integrantes.

- Es condición necesaria y suficiente para que cada una da las alternativas sea derivable que contenga, como mínimo una vez, una variable y su negación (Si cada variable está solo afirmada o solo negada, dando los valores convenientes a las variables, la alternativa valdrá 0, y será no derivable de los axiomas).

Nótese que la reducción a FNC es un procedimiento decisorio, pues dada una expresión cualquiera, basta reducirla a FNC para saber si es derivable o no.

En lo que respecta a la completitud, diremos que el cálculo proposicional es sintácticamente completo, pues se hace inconsistente al añadirle una expresión no demostrable: sea p la expresión. Reduzcámosla a FNC. En ella figurará alguna alternativa en la que cada variable aparecerá solo negada o afirmada. Substituyamos (por R1) las variables negadas de dicha alternativa (que podemos representar, por ejemplo, por AAApNqrNs) por Np y las afirmadas por p: obtendremos AAApNNppNNp, o sea AAApppp, de donde, mediante A1, deducimos p. Si, por el contrario, substituimos las variables negadas por p y las no negadas por Np, obtenemos AAANpNpNpNp, de donde deducimos Np. Al ser derivables p y Np, el sistema se hace inconsistente.

10.- La lógica y la verdad. Relaciones entre semántica y sintaxis.

Queremos hallar las relaciones entre cálculo y lenguaje formalizado, y, en consecuencia, entre consecuencia lógica y derivabilidad. También intentamos establecer la equivalencia entre demostrabilidad y validez.

Cuando se da una cierta interpretación que transforma una expresión p en verdadera acerca de un universo dado, se dice que la interpretación es un "modelo" de p, llamándose p satisfactible. Puede ocurrir que una interpretación sea modelo de p y no de q. Una expresión siempre satisfactible se llama válida. Un conjunto M de expresiones se llama satisfactible si hay una representación que es su modelo, y válido si cualquier interpretación es modelo suyo.(26)

Extensión de un sujeto es un individuo. Extensión de una proposición es su valor de verdad.(27)

Dado que, extensionalmente, una proposición denota un valor de verdad, una expresión interpretada será una sucesión de constantes, unos y ceros. Mediante el uso de las tablas de verdad se podrá calcular el valor de la expresión entera. Si vale 1, diremos que es satisfecha por esa interpretación.(28)

Los axiomas son satisfechos por cualquier interpretación, de donde son válidos. Al aplicar las RI a los axiomas, las expresiones obtenidas son también válidas.

De todo ello deducimos que toda expresión demostrable es válida. El cálculo proposicional solo permite la deducción de fórmulas válidas.

Acabamod de demostrar que toda expresión demostrable es válida. Falta demostrar lo contrario. Pasamos a hacerlo: sea P una expresión cualquiera, y válida, y P′ la misma P en FNC. Cada alternativa de P′ contendrá una variable y su negación, de donde P′ es demostrable, y también P.(29)

11.- El teorema de deducción.(30)

Queremos hallar las conexiones existentes entre demostrabilidad y derivabilidad, y entre validez y consecuencia lógica.

Es fácil de hallar la equivalencia entre demostrabilidad (validez) y derivabilidad(Consecuencia lógica): una expresión demostrable (válida) puede considerarse derivable (consecuencia lógica) de 0 hipótesis (Premisas).

Por ser más laboriosa, no demostraremos la equivalencia inversa, limitándonos a enunciarla:

Teorema de deducción: si, dado un conjunto M de expresiones que contiene como suposición la expresión P, se puede derivar (se puede conseguir como consecuencia lógica) de él la expresión Q, entonces es derivable (consecuencia lógica) del conjunto que se obtiene eliminando P de M la expresión CPQ, y viceversa.(31)

- - - - -

CONSIDERACIONES FINALES

parte, una visión del cálculo proposicional bastante desligada de la realidad, no quiere ello decir que prescindamos de todo significado semántico: al decir que los símbolos del cálculo están desprovistos de significado, intentamos expresar nuestro desconocimiento acerca de"que" significa el símbolo, aunque si sabemos cómo se opera enn él. Así, en la expresión Np, sabemos que p ha de ser unn proposición. Por otra parte, las reglas han de tener algún significado, pues de lo contrario no las comprenderíamos. Vemos pues que, en último término, nuestro cálculo ha de acudir a algunas nociones de verdad. La moderna lógica matemática, parte de la cuál es el cálculo proposicional, ha obtenido con respecto a la lógica tradicional un adelanto inapreciable: un gigantesco aumento del rigor y un sistema para hallar inferencias e implicaciones en mayor número y de mayor complicación, labor que hubiese llevado a los antiguos lógicos años enteros de trabajo.

BIBLIOGRAFIA

-AGAZZI, Evandro. La lógica simbólica. Ed. Herder. Barcelona, 1967. 1ª ed..

NOTAS

(1) Cf. AGAZZI: la lógica simbólica, pag. 33.

(2) la lógica simbólica, pag 151

(3) Cf. ib., o. c. p. 156s

(4) Ib., o. c., pag 158

(5) La lógica simbólica, l. c..

(6) Cf. ib., o. c., p. 159

(7) Nótese al respecto que la definición tradicional (proposición es la forma lógica que afirma o niega una cosa) excluye frases como "!Cállate!", "x es mayor que y", etc...

(8) Para todo el párrafo, cf. p. 164s

(9) Para todo el párrafo, cf. p. 168s, 176s.

(10) Cf. o.c. p. 174-175

(11) Cf. p. 185s

(12) El signo Df. ..., = se lee "es igual por definición".

(13) Otras definiciones pueden establecerse: por ejemplo:

Df. Apq=NKNpNq

Df. Kpq=NANpNq

(14) Cf. o.c. p. 181

(15) Cf. o.c. p. 193

(16) Cf. o.c. l.c.

(17) Para todo este parágrafo, cf. p. 194ss

(18) Cf. o.c. p. 206s

(19) Para todo el párrafo, cf. p. 209s

(20) o.c., p.210

(21) l.c.

(22) cf. p. 239s

(23) cf. p. 244s

(24) Prescindimos de los significados de verdad que les atribuíamos.

(25) cf. o.c. p. 249s

(26) Para todo el número 10. cf. p.256s

(27) Copio casi literalmente de p. 264

(28) Cf. p. 266

(29) Cf. p. 269

(30) Cf. p. 270s

(31) Copio casi literalmente de p. 279-280

Nota: ([illegible]) constar la bibliografía de un solo libro, he dejado de citarlo en la mayoría de las notas.