Modelos no estándar de la Aritmética de Peano*

Josep Maria Blasco

Espacio Psicoanalítico de Barcelona
Balmes, 32, 2º 1ª – 08007 Barcelona
jose.maria.blasco@epbcn.com
+34 93 454 89 78

26 de septiembre de 2006

Resumen

El presente texto es una recolección de hechos básicos sobre los modelos no estándar de la aritmética de Peano (PA). Después de repasar algunas generalidades de Teoría de Modelos, demostramos la existencia de modelos no estándar. Para estudiar estos modelos, seguimos dos aproximaciones: ver qué pasa cuando los "cortamos", y ver cómo se pueden "engrosar" sin que dejen de ser modelos de PA. Al estudiar los cortes, se verá que los hay cerrados bajo operaciones sucesivamente más fuertes; al estudiar los engrosamientos ("extensiones"), encontraremos modelos más "tupidos" (las extensiones cofinales) y modelos más "largos" (las extensiones finales).

Índice general

*URL de este documento: https://www.epbcn.com/pdf/jose-maria-blasco/2006-09-26-Modelos-no-estandar-de-la-Aritmetica-de-Peano.pdf. Este artículo fue escrito durante el año académico 2005-2006 para la obtención del *Diploma d'Estudis Avançats* (DEA) en el programa de doctorado *Lógica y Fundamentos de las Matemáticas* del Departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona.

1 Introducción

El presente artículo consta de seis secciones.

La primera sección es esta *Introducción*.

La segunda sección, *Preliminares*, fija la notación y la axiomática de la aritmética de Peano (PA) y encuentra, a partir de una secuencia de subsistemas débiles de PA, las distintas propiedades básicas de los modelos no estándar, para terminar con una construcción completa de sistemas no estándar para Th($\mathbb{N}$). El resto del artículo estará destinado a explorar algunas características de esos sistemas no estándar.

La tercera sección, *Segmentos iniciales y cortes*, presenta las nociones de *segmento inicial*, equiparable a la de segmento inicial en $\mathbb{N}$, y la de *corte*, que es específica de los modelos no estándar. Demostramos que los cortes propios son indefinibles, aún con parámetros del modelo, y probamos como consecuencia los teoremas clásicos de *overspill* y *underspill*.

El resto del artículo está destinado a mostrar que cada modelo no estándar de PA tiene extensiones "más tupidas" (las llamadas *extensiones cofinales*) y extensiones "más largas" (las llamadas *extensiones finales*).

En la cuarta sección, *Extensiones cofinales*, se hace uso extensivo de los principios de Colección y del Teorema MRDP para demostrar que cada modelo de PA tiene una extensión cofinal.

La quinta sección, *Generalidades sobre teoría de modelos*, introduce la maquinaria teórica que va a ser necesaria para la sección sexta: clausuras definibles, aplicaciones elementales, modelos primos y atómicos, y tipos.

Finalmente, la sexta sección, *Extensiones finales*, contiene la demostración del que todo modelo M no estándar de PA es submodelo de otro modelo N del cual M es un segmento inicial. De hecho demostramos más: todo modelo M de PA tiene una extensión final elemental propia que además es conservativa.

El artículo se completa con dos apéndices técnicos: en el apéndice A damos demostraciones de los axiomas redundantes de PA, y en el apéndice B introducimos algunas nociones elementales de teoría de modelos, que pueden ser útiles al lector que no posea formación en esta disciplina.

La secuencia de subsistemas débiles de la segunda sección está basada en Enderton [3]. La axiomatización de PA se inspira en la de Kaye [4], a quien seguimos en las secciones tercera y cuarta. Para la preparación de la sexta sección hemos preferido referirnos a Pillay [7].

Este trabajo ha sido escrito en el transcurso del año académico 2005-2006 como parte de las actividades del segundo año del programa de Doctorado en Lógica impartido por el departamento de Lógica, Historia y Filosofía de la Ciencia de la Universidad de Barcelona, bajo la tutoría de Enrique Casanovas, profesor del mencionado departamento en la Facultad de Filosofía, a quien quiero expresar mi agradecimiento por su soporte y su ilimitada paciencia.

2 Preliminares

2.1 Axiomas de la Aritmética de Peano

Definición 2.1 (Lenguaje de la aritmética de Peano)**.** *El* ***lenguaje de la aritmética de Peano****, denotado L_{PA}, es $\langle +, \cdot, S, 0, < \rangle$, donde $+$ y $\cdot$ son operaciones binarias, S es una operación unaria, 0 es una constante, y $<$ es una relación binaria.*

La aritmética de Peano (PA) constará de una serie de axiomas seguidos del esquema de axioma de inducción. Dicho de otro modo: $PA = PA^- \cup Ind$, donde PA^- es el conjunto de axiomas que regulan el funcionamiento de la suma, el producto, el sucesor, etc., e Ind es el esquema de axioma de inducción. Esta separación es habitual en la literatura, y tiene la ventaja de que se pueden encontrar expresiones Π_1 de casi todos los axiomas de PA^-.

Definición 2.2 (PA^-)**.** *Llamaremos PA^- a la L_{PA}-teoría engendrada por la clausura universal de las siguientes fórmulas:*

$$
\begin{array}{ll}
\text{(S1)} & Sx \neq 0 \\
\text{(S2)} & Sx = Sy \to x = y \\
\text{(S3)} & x = 0 \vee \exists y(x = Sy) \\
\text{(A1)} & x + 0 = x \\
\text{(A2)} & x + Sy = S(x + y) \\
\text{(A3)} & x + y = y + x \\
\text{(A4)} & x + (y + z) = (x + y) + z \\
\text{(P1)} & x \cdot 0 = 0 \\
\text{(P2)} & x \cdot Sy = x \cdot y + x \\
\text{(P3)} & x \cdot y = y \cdot x \\
\text{(P4)} & x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z \\
\text{(D1)} & x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \\
\text{(O1)} & (x < y \wedge y < z) \to x < z \\
\text{(O2)} & \neg(x < x) \\
\text{(O3)} & x < y \vee x = y \vee y < x \\
\text{(O4)} & x < y \leftrightarrow Sx < Sy \\
\text{(O5)} & x < Sx \\
\text{(O6)} & 0 = x \vee 0 < x \\
\text{(O7)} & x < y \to (Sx = y \vee Sx < y)
\end{array}
$$

Definición 2.3 (Aritmética de Peano)**.** *Llamaremos* ***aritmética de Peano****, denotada PA, a la L_{PA}-teoría formada por $PA^- \cup Ind$, donde Ind es el esquema de axioma siguiente: para cada L_{PA}-fórmula $\varphi(x)$, eventualmente con variables libres, que no explicitamos para aligerar la notación,*

$$\text{(Ind)} \quad [\varphi(0) \wedge \forall x(\varphi(x) \to \varphi(Sx))] \to \forall x \varphi(x).$$

Observación 2.4. *A1, A3 y A4 son las ecuaciones para un monoide abeliano aditivo con 0 como elemento neutro; de P1, P2 y A3 se sigue que*

$$\text{(P5)} \quad x \cdot (S0) = x \cdot 0 + x = 0 + x = x + 0 = x,$$

de modo que P3, P4 y P5 son las ecuaciones para un monoide abeliano aditivo con $1 =_{\text{def}} S0$ como elemento neutro; así, A1, A3, A4, P1, P2, P3, P4 y D1 son las ecuaciones para un semianillo abeliano.

O1, O2, O3 y O6 expresan que $<$ es un orden total con elemento mínimo 0. Por O4 y O5, el orden es compatible con el sucesor; por O7, Sx es el sucesor inmediato de x (es decir, no hay elementos intermedios entre x y Sx).

Observación 2.5. *S1 se deduce de O1, O2, O3, O5 y O6, y S2 se deduce de O1, O2 y O4. Disponiendo de inducción, S3, A3, A4, P3, P4, D1, O6 y O7 son también redundantes. En el apéndice A pueden encontrarse demostraciones de estos hechos.*

Observación 2.6. *Por $A2$ y $A1$, $x + S0 = S(x + 0) = Sx$ y por tanto, si abreviamos $1 =_{\text{def}} S0$,*

$$\forall x(Sx = x + 1),$$

de modo que podríamos eliminar la función S sin más que introducir una nueva constante 1 (y, naturalmente, reescribir los axiomas como corresponde).

Notación. *En lo que sigue, L es un lenguaje cualquiera. M, N, K son modelos, S y T son teorías, m, n son naturales estándar y a, ..., e son naturales no estándar. En general, $A \subseteq B$ denota un subconjunto, y no una subestructura; seremos siempre explícitos en el segundo caso. $A \preccurlyeq B$ denota una subestructura elemental, añadiendo un subíndice cuando queramos restringir la elementariedad a una clase determinada de fórmulas. Pondremos $I \subseteq_{\text{e}} M$ cuando I sea una subestructura inicial de M (o M una extensión final de I), y $M \subseteq_{\text{cf}} N$ cuando N sea una extensión cofinal de M.*

2.2 Sistemas más débiles

A continuación examinaremos una serie de reductos de L_{PA} y sus correspondientes teorías restringidas. El interés de ello residirá en lo que sigue: los diversos aspectos de los modelos no estándar, que demostraremos más adelante de un modo simultáneo para el caso $T = \text{Th}(\mathbb{N})$, van apareciendo de forma razonada y gradual si consideramos estas teorías restringidas. Para este apartado, consúltese también Enderton [3].

2.2.1 Números naturales con el sucesor

Sea $L_S = \langle 0, S \rangle$, y consideremos la teoría T_0 formada por los axiomas S1, S2 y S3. S2 indica que S es inyectiva, S1 que $0 \notin \text{ran}(S)$, y S3 que todo elemento no nulo tiene anterior. Ahora sabemos que si $x \neq y$, con seguridad $Sx \neq Sy$, pero nada nos garantiza que no existan otros tipos de bucle cerrado, por ejemplo $x = SSx$, o $x = SSSx$, etc., para algún x. Si queremos eliminar este tipo de patologías, tendremos que considerar un esquema de axioma S4.n, para cada $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$: denotemos $S^0 n = n$, $S^1 = S$, de modo que $S^1 x = Sx$, y $S^{n+1} x = SS^n x$; entonces para $n = 1, 2, ...$,

$$(\text{S4}.n) \quad S^n x \neq x.$$

En $T_S = T_0 \cup \{\text{S4}.n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ podemos garantizar que 0 no es sucesor, que cada $x \neq 0$ es sucesor, que S es inyectiva, y que cada elemento x es diferente de $S^n(x)$ para $n = 1, 2, ...$ Es pues evidente que $\langle \mathbb{N}, 0^{\mathbb{N}}, S^{\mathbb{N}} \rangle$ es un modelo de T_S.

De hecho, un modelo arbitrario $M \models T_S$ contiene una copia isomorfa de $\mathbb{N}$, definida por $f(0^{\mathbb{N}}) = 0^M$ y $f(S^{\mathbb{N}}(x)) = S^M(f(x))$ (es fácil ver, por inducción en la metateoría, que para cada $n \in \mathbb{N}$ hay un $n' \in M$ tal que $f(n) = n'$). A los elementos x de M tales que hay un $n \in \mathbb{N}$ con $x = f(n)$ los llamaremos *elementos estándar*.

Sin embargo, nada en los axiomas impide que exista un elemento $a \in M$ no estándar. Dado un elemento tal, podemos construir Sa, $S^2a = SSa$, etc., que por S4.n serán todos distintos, e igualmente, por $S3$, podemos constuir b tal que $Sb = a$, lo que podemos denotar $b = S^{-1}a$, y consecutivamente $c = S^{-1}b = S^{-2}a$, y así sucesivamente. De este modo obtenemos una sucesión asociada a a

$$... \overset{S}{\to} S^{-2}a \overset{S}{\to} S^{-1}a \overset{S}{\to} a \overset{S}{\to} Sa \overset{S}{\to} S^2a \overset{S}{\to} ...,$$

a la que denominaremos *la $\mathbb{Z}$-cadena asociada a a*. Dados dos elementos arbitrarios $a, b \in M$, o bien $a = S^n b$ o $b = S^n a$ para algún $n \in \mathbb{N}$ (en cuyo caso o bien tanto a como b son estándar o bien a y b están en la misma $\mathbb{Z}$-cadena), o bien no existe un tal n; en este último caso, si tanto a como b son no estándar, sus correspondientes $\mathbb{Z}$-cadenas serán disjuntas.

Así, un modelo $M \models T_S$ consistirá en una parte estándar isomorfa a $\mathbb{N}$ y una cantidad arbitraria de $\mathbb{Z}$-cadenas disjuntas dos a dos, y por tanto vendrá determinado salvo isomorfismo por el número de esas $\mathbb{Z}$-cadenas: si $M, N \models T_S$, tanto M como N contienen copias isomorfas de $\mathbb{N}$, y eso fija el isomorfismo $f_{\mathbb{N}}$ entre las partes estándar de M y N; por otra parte, hemos supuesto que hay el mismo número de $\mathbb{Z}$-cadenas en M y en N: fijemos pues una biyección entre las $\mathbb{Z}$-cadenas de M y las de N; finalmente, dada una $\mathbb{Z}$-cadena C de M y una $\mathbb{Z}$-cadena D de N, elijamos $a \in C$ y $b \in D$ arbitrarios, y definamos $f_C : C \to D$ mediante $f(a) = b$, $f(Sx) = Sf(x)$ y $f(S^{-1}x) = S^{-1}f(x)$. Es claro que $f = f_{\mathbb{N}} \cup \bigcup\{f_C : C \text{ es una } \mathbb{Z}\text{-cadena de } M\}$ es un isomorfismo.

2.2.2 Añadiendo el orden

Si añadimos el símbolo de la relación de orden $<$ a L_S obtenemos $L_< = \{0, S, <\}$. Consideremos la teoría $T_<$ formada por S3, O1, O3, O6, y la clausura universal de los siguientes axiomas:

$$\begin{array}{ll} (\text{O8}) & x < Sy \leftrightarrow (x = y \lor x < y) \\ (\text{O9}) & x < y \to \neg(y < x) \end{array}$$

Lema 2.7. *$T_< \vdash O2$, es decir, $T_< \vdash \neg(x < x)$.*

Prueba. Si $x < x$, por O9 $\neg(x < x)$, una contradicción. □

Lema 2.8. *$T_< \vdash \neg(x < y) \leftrightarrow (y = x \lor y < x)$.*

Prueba. Es lógicamente equivalente a O3. □

Lema 2.9. *$T_< \vdash O4$, es decir, $T_< \vdash x < y \leftrightarrow Sx < Sy$.*

Prueba. Por el lema 2.8, $x < y \leftrightarrow (y \neq x \land y \not< x)$, por O8 $x < y \leftrightarrow y \not< Sx$, aplicando otra vez 2.8 $x < y \leftrightarrow Sx = y \lor Sx < y$, y por O8 otra vez $x < y \leftrightarrow Sx < Sy$. □

Lema 2.10. *$T_< \vdash O5$, es decir, $T_< \vdash x < Sx$.*

Prueba. Hágase $y = x$ en O8. □

En $T_<$ puede igualmente derivarse con facilidad S1 (ver el lema A.14), S2 (lema A.15) y S4.n, para cada $n = 1, 2, ...,$:

Lema 2.11. $T_< \vdash$ (S4.n)*, es decir, para cada* $n > 0$, $S^n x \neq x$.

Prueba. Por O5, $x < Sx$, y por O3 $x \neq Sx$. El caso $n > 1$ se demuestra por inducción en la metateoría. □

De este modo, cada modelo de $T_<$ lo será de T_S.

$T_<$ admite eliminación de cuantificadores, pero no tiene suficiente potencia para definir la suma.

Sus modelos vendrán determinados salvo isomorfismo por el tipo de orden (arbitrario) inducido por el conjunto de sus $\mathbb{Z}$-cadenas.

2.2.3 La aritmética de Presburger

Si añadimos la suma a $L_<$, obtenemos $L_+ = \{0, S, <, +\}$, de modo que podemos considerar la L_+-teoría T_+ definida adecuadamente (no daremos los detalles, que serían tediosos). Ahora las $\mathbb{Z}$-cadenas ya no podrán ordenarse de modos arbitrarios: en efecto, el orden inducido por las $\mathbb{Z}$-cadenas será un orden lineal denso sin extremos (la idea intuitiva es clara; puede encontrarse una demostración detallada en los lemas 2.19, 2.20 y 2.21).

T_+ es decidible, y consecuentemente es una teoría muy débil: por ejemplo, no permite definir el producto.

2.2.4 La aritmética de Skolem; definibilidad de + a partir de $\cdot$ y S

Consideremos ahora $L_\cdot = \{\cdot\}$. La correspondiente $L_\cdot$-teoría $T_\cdot$ (definida de la forma natural), llamada *aritmética de Skolem* es también decidible. Es una teoría débil, en la que no es posible definir la suma.

Si ahora añadimos el sucesor S, obtenemos un nuevo lenguaje $L'_\cdot$ y una nueva $L'_\cdot$-teoría $T'_\cdot$ en la que *sí* es posible definir la suma (ver [3], p. 251): $a + b = c$ sii o bien $a = 0 \wedge b = 0 \wedge c = 0$, o bien $c \neq 0$ y

$$S(a \cdot c) \cdot S(b \cdot c) = S(c \cdot c \cdot S(a \cdot b))$$

esto es, $(ac + 1)(bc + 1) = c^2(ab + 1)$, o $abc^2 + ac + bc + 1 = abc^2 + c^2$, y por tanto $c(a + b) = c \cdot c$, es decir, $c = a + b$.

2.3 Limitaciones de PA y sus variaciones

¿Hasta que punto PA captura todas las propiedades de $\mathbb{N}$? Para contestar a esta pregunta necesitamos descomponerla primero en sus dos componentes:

Lema 2.12. *Como PA es recursivamente enumerable, por el Teorema de Gödel existirán sentencias de L verdaderas en $\mathbb{N}$ pero indemostrables en PA.*

Por tanto PA no captura la esencia de $\mathbb{N}$, hay cosas que se le escapan. ¿Qué pasa si consideramos la teoría completa de $\mathbb{N}$? Aunque no sabemos exactamente cuál es, nada nos impide pensarla y trabajar con ella.

Definición 2.13 (La aritmética verdadera)**.** *En algunos casos consideraremos, en vez de PA,* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$*, la* ***teoría de*** $\mathbb{N}$*, llamada también* ***aritmética verdadera****, es decir, el conjunto de sentencias expresables en L que son verdaderas en L. Como resulta inmediato que* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ *es una teoría completa,* $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ *no puede ser recursivamente enumerable.*

Ahora disponemos de una teoría completa. Por una parte, como no es recursivamente enumerable, está condenada a ser parcialmente desconocida por nosotros para siempre; pero por otra parte, al ser completa, podríamos tener la esperanza de que capture de modo único las propiedades de $\mathbb{N}$. Sin embargo, mediante una aplicación sencilla de los teoremas de Compacidad y de Löwenheim-Skolem veremos que esta esperanza es infundada: incluso la teoría completa de $\mathbb{N}$ tiene modelos inesperados, llamados *modelos no estándar*, muy distintos de $\mathbb{N}$. Además, como claramente

$$PA \subset \mathrm{Th}(\mathbb{N}),$$

cada modelo no estándar de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ lo será de PA (y además podrán haber modelos no estándar de PA que no lo sean de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$). El siguiente apartado está dedicado a demostrar detalladamente la existencia de modelos no estándar de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$, y el resto del documento se centrará en estudiar algunas propiedades de esos modelos no estándar.

2.4 Los modelos no estándar

Consideremos la L_{PA}-estructura $\mathbb{N} = \langle \mathbb{N}, +, \cdot, S, 0, < \rangle$, lo que se conoce como el **modelo estándar de** $\mathbb{N}$, y consideremos la colección $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ de todas las sentencias de L verdaderas en el modelo $\mathbb{N}$. Demostraremos que hay modelos de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ diferentes de $\mathbb{N}$.

Primero fijaremos algunas notaciones: para facilitar nuestros razonamientos, si tenemos dos elementos $x < y$ e $x+z = y$, escribiremos $y-z$ como un modo de hablar de x (nótese que esto no nos permite hablar de elementos no existentes como $0 - 3$ que, demostrablemente, no existen, ya que $\neg(\exists x)(x + 3 = 0)$ es verdadero en $\mathbb{N}$).

Sea c una constante nueva, para cada $n \in \mathbb{N}$ sea G_n la sentencia $n < c$, y sea $G = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{G_n\}$. Si ahora consideramos el conjunto de sentencias $S = \mathrm{Th}(\mathbb{N}) \cup G$, resulta inmediato que cada subconjunto finito F de S tiene un modelo: basta con tomar $\mathbb{N}$ y asignar $c = k \in \mathbb{N}$, donde $k > n$ para cada n tal que $G_n \in F$, y tenemos un modelo de F. Por el teorema de compacidad, S tiene un modelo M, y por el teorema de Löwenheim-Skolem, hay un modelo contable M que es un modelo de S. Pero $\mathrm{Th}(\mathbb{N}) \subseteq S$, y por tanto todos los teoremas de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$ son teoremas de S, con lo que M también es un modelo de $\mathrm{Th}(\mathbb{N})$. Llamaremos a tales modelos **modelos no estándar** de PA.

En un modelo tal, existe un c que es mayor que todos los elementos de $\mathbb{N}$. Llamemos a todos los elementos de $\mathbb{N}$ **estándar**, y a los demás elementos **no estándar**. Estudiaremos algunas propiedades de los modelos con elementos no estándar.

En el resto de la sección supondremos que M es un modelo no estándar de PA.

Lema 2.14. *Sea $M \models PA$ no estándar. Entonces M contiene una copia isomorfa de $\mathbb{N}$, es decir, hay un subconjunto $S \subsetneq M$ (de hecho es un segmento inicial) tal que $S \cong \mathbb{N}$.*

Prueba. Denotemos, por recursión en la metateoría, $\mathbf{0} = 0$, $\mathbf{1} = 1$, y, en general, $\mathbf{n} + \mathbf{1} = (\mathbf{n}) + 1$ (por ejemplo, $\mathbf{4} = (\mathbf{3}) + 1 = ((\mathbf{2}) + 1) + 1 = (((\mathbf{1}) + 1) + 1) + 1 = (((1) + 1) + 1) + 1)$. Es fácil demostrar por inducción que para cada $n \in \mathbb{N}$, si $N \models PA$, entonces $N \models \exists! x(x = \mathbf{n})$, de modo que tanto $\mathbb{N}$ como M contendrán un único elemento $\mathbf{n}^{\mathbb{N}}$ y $\mathbf{n}^{M}$ para cada $n \in \mathbb{N}$, respectivamente. Si definimos $f : \mathbb{N} \to M$ mediante $f(\mathbf{n}^{\mathbb{N}}) = \mathbf{n}^{M}$, podemos considerar $S = f[\mathbb{N}] \subset M$.

Sólo queda ver que $g : \mathbb{N} \to S$ definida mediante $g(x) = f(x)$ es un isomorfismo. Es claro que g es exhaustiva por construcción, y además tiene que ser inyectiva por la unicidad de cada $\mathbf{n}^{M}$, y por tanto es una biyección. Claramente $g(0) = 0$, por lo que $g(n + 0) = g(n) = g(n) + 0 = g(n) + g(0)$, y por inducción se prueba que $g(n+m) = g(n)+g(m)$, y similarmente para $\cdot$, con lo resulta que g es un isomorfismo, como deseábamos. $\square$

Lema 2.15. *Sea $c \in M$ no estándar. Entonces existen elementos $c-n, c+n \in M$ para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.*

Prueba. $(\forall x)(x \neq 0 \to (\exists y)(y + 1 = x)) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, y por tanto $c - 1 \in M$. Del mismo modo, $c - 2 \in M$, $c - 3 \in M$, etc. Similarmente, $(\forall x)(\exists y)(x + 1 = y) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, y por tanto $c + 1 \in M$, $c + 2 \in M$, etc. $\square$

Definición 2.16 ($\mathbb{Z}$-cadenas)**.** *Sea $c \in M$ no estándar. El conjunto $Z(c) = \{c\} \cup \{c - n, c + n : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ se llama la **$\mathbb{Z}$-cadena** asociada a c.*

Lema 2.17. *Dadas dos $\mathbb{Z}$-cadenas $Z(d)$ y $Z(e)$, o bien $Z(d) \cap Z(e) = \emptyset$ o bien $Z(d) = Z(e)$.*

Prueba. Como $(\forall x)(\forall y)(x = y \vee x < y \vee x > y) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, o bien $d = e$, en cuyo caso trivialmente $Z(d) = Z(e)$, o bien $d \neq e$, y entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $e < d$. Entonces o bien hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $e + n = d$, en cuyo caso es fácil ver que $Z(d) = Z(d)$, o bien no hay un tal n, y entonces $Z(d) \cap Z(e) = \emptyset$. $\square$

Notación. *Sean $Z(d)$ y $Z(e)$ dos $\mathbb{Z}$-cadenas. Si todos los elementos de $Z(e)$ son mayores que todos los elementos de $Z(d)$, escribiremos $Z(d) < Z(e)$.*

Lema 2.18. *Dadas dos $\mathbb{Z}$-cadenas diferentes $Z(d)$ y $Z(e)$, o bien $Z(d) < Z(e)$ o bien $Z(e) < Z(d)$ (el conjunto de las $\mathbb{Z}$-cadenas constituye un orden lineal).*

Prueba. Es inmediato, ya que $\forall x \forall y(x \neq y \to x < y \vee y < x) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$. $\square$

Lema 2.19. *Dada una $\mathbb{Z}$-cadena $Z(d)$ hay una $\mathbb{Z}$-cadena mayor, esto es, una $\mathbb{Z}$-cadena $Z(e)$ tal que $Z(d) < Z(e)$.*

Prueba. Consideremos $d + d$. Como $\forall x \forall y \forall z(x + y = x + z \to y = z) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, si fuese $d + d = d + n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, tendríamos $d = n$, lo que es absurdo ya que d es no estándar. Por tanto, $d + d \notin Z(d)$, y podemos tomar $e = d + d$. $\square$

Lema 2.20. *Dada una $\mathbb{Z}$-cadena $Z(d)$, hay una $\mathbb{Z}$-cadena menor, esto es, una $\mathbb{Z}$-cadena $Z(e)$ tal que $Z(e) < Z(d)$.*

Prueba. $\forall x(x \neq 0 \wedge x \neq 1 \rightarrow \exists y(y < x \wedge (y+y = x \vee y+y = x+1))) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, y por tanto hay un e tal que o bien $e+e=d$ o bien $e+e=d+1$. Es fácil ver que $Z(e) \neq Z(d)$ y que $Z(e) < Z(d)$. □

Acabamos de ver que el conjunto de las $\mathbb{Z}$-cadenas es un orden lineal sin extremos.

Lema 2.21 (El conjunto de las $\mathbb{Z}$-cadenas es denso)**.** *Dadas dos $\mathbb{Z}$-cadenas diferentes $Z(d) < Z(e)$, existe una $\mathbb{Z}$-cadena intermedia $Z(f)$, esto es, una $\mathbb{Z}$-cadena tal que $Z(d) < Z(f) < Z(e)$.*

Prueba. Como $\forall x \forall y \exists z(z+z = x+y \vee z+z = x+y+1) \in \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, elijamos $f+f = d+e$ si $d+e$ es par, y $f+f = d+e+1$ si $d+e$ es impar. Es fácil ver que $Z(d) < Z(f) < Z(e)$. □

Corolario 2.22. *Si el conjunto de las $\mathbb{Z}$-cadenas es numerable, entonces es isomorfo a $\mathbb{Q}$ (si olvidamos la estructura interna de cada $\mathbb{Z}$-cadena).*

Prueba. Por el teorema de Cantor, dos órdenes lineales densos sin extremos numerables son siempre isomorfos. □

Corolario 2.23. *Si aumentamos el lenguaje con un símbolo de relación $<$ con el sentido habitual, todos los modelos numerables no estándar de PA son orden-isomorfos y tienen tipo de orden $\omega + (\omega^* + \omega) \cdot \theta$, donde θ es el tipo de orden de $\mathbb{Q}$.*

Prueba. Inmediato. □

Nótese que este orden-isomorfismo no va más allá: existen efectivamente modelos con propiedades (relacionadas con otras operaciones) que los hacen no isomorfos. De hecho, hay $2^{\aleph_0}$ modelos numerables no isomorfos de PA.

3 Segmentos iniciales y cortes

3.1 Segmentos iniciales

En $\mathbb{N}$ podemos definir *segmentos cerrados*

$$[a,b] = \{n \in \mathbb{N} : a \leq n \leq b\},$$

abiertos

$$(a,b) = \{n \in \mathbb{N} : a < n < b\},$$

y sus correspondientes combinaciones *semiabiertas*. Un segmento I es *inicial* cuando $0 \in I$: entonces $I = [0,a) = \{n \in \mathbb{N} : n < a\}$ viene determinado únicamente por a. Si intentamos trasladar esta definición a los modelos no estándar de PA, encontramos una dificultad: además de segmentos iniciales abiertos $[0,a)$ y cerrados $[0,a] = [0,a+1)$, hay un nuevo tipo de segmento: aquél que termina con una $\mathbb{Z}$-cadena completa, de modo que no tiene la forma $[0,a)$ para ningún a. Para poder dar una definición de segmento inicial que abarque los dos casos, nos centraremos pues en otra propiedad de los segmentos: si a es un elemento de un segmento inicial I y $b < a$, claramente $b \in I$:

Definición 3.1 (Segmentos iniciales de modelos de PA)**.** *Sean $M \models PA$ y $S \subseteq M$. Decimos que S es un* ***segmento inicial*** *de M si y sólo si*

$$\forall x \in S(y < x \to y \in S),$$

es decir, si S contiene todos los elementos menores que cada elemento de S o, intuitivamente, si S no "tiene agujeros".

Ejemplos: 1) Para cada $a \in M$, el conjunto $[0,a) = \{x \in M : x < a\}$ es un segmento inicial de M.

2) Fijemos $a \in M$ no estándar, y consideremos $S = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0, a+n)$. Claramente, para ningún $b \in M$ es $S = [0,b)$, y sin embargo S es un segmento inicial. A los segmentos iniciales de este tipo los llamaremos *cortes*.

3.2 Cortes

La noción de *corte* en modelos de PA es similar a la noción de cortadura empleada por Dedekind en la construcción de los números reales (aunque los cortes en modelos de la aritmética se identifican con la parte izquierda del corte, no con las dos clases disjuntas de elementos). En nuestro caso nos interesará que el corte sea cerrado bajo la operación de sucesor, como en el ejemplo 2 más arriba.

Definición 3.2 (Cortes y cortes propios)**.** *Sea $M \models PA$. Un segmento inicial I de M es un* ***corte*** *de M cuando es cerrado bajo la operación de sucesor, es decir, cuando*

$$M \models \forall x(x \in I \to x+1 \in I)).$$

Decimos que I es un ***corte propio*** *si además $I \neq M$.*

Observación 3.3. *Los segmentos iniciales pueden ser arbitrarios, pero los cortes tienen que contener las $\mathbb{Z}$-cadenas de todos sus elementos; o, dicho al revés, no podemos cortar por el medio de una $\mathbb{Z}$-cadena (si lo hacemos, obtenemos un segmento inicial, pero no un corte).*

A continuación demostramos la existencia de cortes propios (es decir, mostramos que la anterior definición coincide con nuestra idea intuitiva de los cortes).

Lema 3.4 (Existencia de cortes propios)**.** *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea $a > \mathbb{N}$ un elemento no estándar de M. Entonces $a + \mathbb{N} =_{\mathrm{def}} \bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0, a+n)$ es un corte propio de M.*

Prueba. Para cada $x \in a + \mathbb{N}$ hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [0, a+n)$, y, como $[0, a+n)$ es un segmento inicial, también todos los $y < x$ cumplen $y \in [0, a+n)$, y por tanto $y \in a + \mathbb{N}$, y $a + \mathbb{N}$ es un segmento inicial.

Por otra parte, si $x \in a + \mathbb{N}$ hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in [0, a+n)$, de donde $x < a + n$ e inmediatamente $x + 1 < a + (n + 1)$, es decir, hay un $m = n + 1$ tal que $x + 1 \in [0, a+m)$, y por tanto $x + 1 \in a + \mathbb{N}$ y $a + \mathbb{N}$ está cerrado bajo sucesores y es de este modo un corte.

Para ver que es propio, basta con considerar que forzosamente $a+a \notin a+\mathbb{N}$ (ya que de lo contrario habría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a + a \leq a+n$ y entonces $a \leq n$, lo que contradice nuestra suposición de que a es no estándar). ☐

Observación 3.5. *Claramente, $a+\mathbb{N}$ es el corte propio más intuitivo y sencillo que puede definirse. Sin embargo, aunque su definición es muy sencilla,*

$$x \in a + \mathbb{N} \leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}(x \leq a + n),$$

en realidad estamos suponiendo que $\mathbb{N}$ es un predicado adicional, es decir, estamos trabajando "desde fuera". Si nos situamos "dentro", no podemos saber qué números son estándar y cuáles no, y entonces la definición anterior deviene infinitaria:

$$x \in a + \mathbb{N} \leftrightarrow \bigvee_{n\in\mathbb{N}} x \leq a + n.$$

Más adelante veremos que esta característica no es casual, y que ningún *corte propio es definible, ni siquiera empleando parámetros de M.*

Mientras que en $\mathbb{N}$ no hay intervalos iniciales cerrados bajo la suma diferentes de $\{0\}$, en cada $M \models PA$ no estándar podemos encontrar *infinitos* cortes de M cerrados bajo la suma:

Lema 3.6 (Existencia de cortes propios cerrados bajo la suma)**.** *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea $a > \mathbb{N}$ un elemento no estándar de M. El conjunto $a \cdot \mathbb{N} = \{b \in M : \exists n \in \mathbb{N}(b < a \cdot n)\}$ es un corte propio de M cerrado bajo la suma.*

Prueba. El conjunto $a \cdot \mathbb{N}$ es un segmento inicial: si $x \in a \cdot \mathbb{N}$ e $y < x$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < a \cdot n$, y por tanto $y < a \cdot n$ e $y \in a \cdot \mathbb{N}$.

El segmento $a \cdot \mathbb{N}$ es un corte: si $x \in a \cdot \mathbb{N}$, hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < a \cdot n$, y por tanto $x + 1 < x + a < a \cdot n + a = a \cdot (n + 1)$, y por tanto $x + 1 \in a \cdot \mathbb{N}$.

El corte $a \cdot \mathbb{N}$ es propio: consideremos $b = a \cdot a = a^2$. Si fuese $b \in a \cdot \mathbb{N}$, habría un $n \in \mathbb{N}$ tal que $a \cdot a < a \cdot n$, de donde $a < n$, contra nuestra elección de a como no estándar. Como la misma operación puede repetirse infinitas veces tomando como punto de partida $a^2 \cdot \mathbb{N}$, es claro que hay infinitos cortes de la misma naturaleza.

Finalmente, $a \cdot \mathbb{N}$ es cerrado bajo la suma: si $x, y \in a \cdot \mathbb{N}$, existen $n, m \in \mathbb{N}$ tales que $x < a{\cdot}n$ e $y < a{\cdot}m$; entonces, claramente, $x{+}y < a{\cdot}n{+}a{\cdot}m = a{\cdot}(n{+}m)$, y por tanto $x + y \in a \cdot \mathbb{N}$. ☐

Nótese por otra parte que $a \cdot \mathbb{N} \not\models PA$, ya que para cada c, $PA \models \exists b(b = c^2)$, con lo que sería $a \cdot \mathbb{N} \models \exists b(b = a^2)$, pero ya hemos visto que esto es imposible. De hecho, $a \cdot \mathbb{N}$ ni siquiera es cerrado bajo el producto. Es claro que un segmento inicial cerrado bajo la adición tiene que ser un corte; si un corte I de M es cerrado bajo la suma y el producto, será una subestructura de M, $I \subseteq M$; este caso nos interesará especialmente, ya que entre submodelos podemos jugar con las fórmulas (las existenciales suben, las universales bajan, y las Δ_0 son absolutas), por lo que le reservaremos una denominación especial:

3.3 Subestructuras iniciales

Definición 3.7. *Sea $M \models PA$, y sea $I \subseteq M$ un corte de M. Diremos que I es una **subestructura inicial**, y escribiremos $I \subseteq_e M$, cuando I sea cerrado bajo las operaciones de PA (es decir, la suma y el producto). También diremos, en este caso, que M es una **extensión final** de I. I es **propio** cuando $I \neq M$.*

Lema 3.8. *Sea $M \models PA$, y sea $I \subseteq M$ un segmento inicial de M con $2 \in I$. Si I es cerrado bajo el producto, entonces es cerrado bajo sucesor y bajo la suma.*

Prueba. (Sucesor) Sea $a \in I$. Si $a = 0$, como $1 < 2 \in I$, $a + 1 = 1 \in I$; y si $a > 0$, $a + 1 \leq a + a = 2a \in I$, y por tanto $a + 1 \in I$.

(Suma) Sea $a, b \in I$, y supongamos, sin pérdida de generalidad, que $a \leq b$. Si $a = 0$, $a + b = b \in I$; si $1 \leq a \leq b$, entonces $a \leq ab$ y $b \leq ab$, con lo que $a + b \leq ab + ab = 2ab$, y como $2, a, b \in I$ y hemos supuesto que I es cerrado bajo el producto, $2ab \in I$ y $a + b \in I$. $\square$

En $\mathbb{N}$ no hay subestructuras iniciales propias, pero para cada $M \models PA$ no estándar hay infinitas subestructuras iniciales propias.

Lema 3.9 (Existencia de subestructuras iniciales propias)**.** *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea $a > \mathbb{N}$ un elemento no estándar de M. El conjunto $a^{\mathbb{N}} = \{b \in M : \exists n \in \mathbb{N}(b < a^n)\}$ es una subestructura inicial propia de M.*

Prueba. $a^{\mathbb{N}}$ es un segmento inicial: si $x \in a^{\mathbb{N}}$ e $y < x$, entonces hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < a^n$, y por tanto $y < a^n$ e $y \in a^{\mathbb{N}}$.

$a^{\mathbb{N}}$ es un corte: si $x \in a^{\mathbb{N}}$, hay un $n \in \mathbb{N}$ tal que $x < a^n$, y por tanto o bien *(a)* $x = 0$, con lo que $n = 1$ y también $0 + 1 = 1 < a$, por ser a no estándar, o bien *(b)* $x > 0$, con lo que $x + 1 \leq x + x = 2x < 2a^n < a \cdot a^n = a^{n+1}$; y en los dos casos $x + 1 \in a^{\mathbb{N}}$.

$a^{\mathbb{N}}$ es cerrado bajo el producto: en la misma notación que en el párrafo anterior, $x \cdot y < a^n \cdot a^m = a^{n+m}$, y por tanto $x \cdot y \in a^{\mathbb{N}}$.

$a^{\mathbb{N}}$ es propio: consideremos $b = a^a$: si fuese $b \in a^{\mathbb{N}}$, sería $a^a < a^n$ para algún $n \in \mathbb{N}$, y, dividiendo n veces por a en cada lado de la fórmula, obtendríamos $a^{a-n} < 1$, lo que es absurdo. $\square$

Podríamos esperar que $a^{\mathbb{N}}$ fuese un modelo de PA, ya que es una subestructura inicial (es decir, es cerrado bajo la suma y el producto); sin embargo, esto es imposible (basta formalizar la prueba de que $a^a \notin a^{\mathbb{N}}$).

Otro ejemplo interesante de subestructura inicial es el siguiente:

Definición 3.10. *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea $a \in M \setminus \mathbb{N}$; definimos*

$$a^{1/\mathbb{N}} = \{b \in M : M \models b^n < a \text{ para cada } n \in \mathbb{N}\}.$$

Lema 3.11. *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea $a \in M \setminus \mathbb{N}$; entonces,*
(1) $a^{1/\mathbb{N}}$ es un corte;
(2) $a^{1/\mathbb{N}}$ es una subestructura inicial;
(3) además, $a \notin a^{1/\mathbb{N}}$ y $\mathbb{N} \subseteq_{\mathrm{e}} a^{1/\mathbb{N}} \subseteq_{\mathrm{e}} M$; y, finalmente,
(4) $a^{1/\mathbb{N}}$ es la mayor subestructura inicial de M que no contiene a.

Prueba. $a^{1/\mathbb{N}}$ es una subestructura inicial: si $b \in a^{1/\mathbb{N}}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ es $b^n < a$, con lo que, si $c < b$, también será, para cada $n \in \mathbb{N}$, $c^n \leq b^n < a$, y así $b \in a^{1/\mathbb{N}}$.

Si $x, y \in a^{1/\mathbb{N}}$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$ es $x^n < a$ e $y^n < a$; si $xy = 0$, trivialmente $xy \in a^{1/\mathbb{N}}$; en caso contrario, si existiese algún $m \in \mathbb{N}$ tal que $(xy)^m \geq a$, bastaría tomar $z = \max\{x, y\}$ para tener $z^{2m} = (z^2)^m = (z \cdot z)^m \geq (xy)^m \geq a$, lo que es absurdo, ya que $z = x$ ó $z = y$. Por tanto, $a^{1/\mathbb{N}}$ es cerrado bajo el producto. Como trivialmente $2 \in a^{1/\mathbb{N}}$, $a^{1/\mathbb{N}}$ es cerrado bajo sucesor y producto. Esto prueba (1) y (2).

(3) Trivialmente $a \notin a^{1/\mathbb{N}}$, ya que de lo contrario sería $a < a^1 = a$, absurdo. Igualmente, como para cada $k, n \in \mathbb{N}$ es $k^n \in \mathbb{N} < a$, claramente $\mathbb{N} \subseteq_{\mathrm{e}} a^{1/\mathbb{N}}$; y como $a^{1/\mathbb{N}} \subseteq_{\mathrm{e}} M$ por (2), como $a \notin a^{1/\mathbb{N}}$, $a^{1/\mathbb{N}} \subsetneq_{\mathrm{e}} M$. Para probar que $N \subsetneq_e a^{1/\mathbb{N}}$ necesitaremos los teoremas de *overspill*.

(4) Supongamos, en busca de una contradicción, que hay una subestructura inicial I de M tal que $a^{1/\mathbb{N}} \subsetneq_e I$ y además $a \notin I$. Para cada elemento de $b \in I \setminus a^{1/\mathbb{N}}$ existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $b^m \geq a$, imposible (I es cerrado bajo el producto, $b^m \in I$, y entonces $a \in I$, una contradicción). □

3.4 Indefinibilidad de los cortes propios

En cuanto al orden, si $M \models PA$ es numerable, es isomorfo a $\mathbb{N} + \mathbb{Z} \cdot \mathbb{Q}$; y, por tanto, habrá un corte especial (el que toma $I = \mathbb{N}$), y después tantos como cortaduras de Dedekind en $\mathbb{Q}$, es decir, *exactamente* $2^{\aleph_0}$. En $\mathbb{Q}$ podemos *definir* numerosos cortes, en particular todos los que identifican un número racional, y algunos para definir números irracionales (p. ej., $\sqrt{2}$); sin embargo, los cortes en M no serán definibles, excepto el corte *impropio* $I = M$ (y todo ello, sin importar que M sea numerable o no):

Lema 3.12 (Indefinibilidad de los cortes propios)**.** *Sea $M \models PA$, e I un corte propio en M. Entonces I no es definible mediante una fórmula con parámetros en M, es decir, no existen una fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in M$ tales que*

$$I = \{x \in M : M \models \varphi(x, \vec{a})\}.$$

Prueba. En caso contrario, y prescindiendo de los parámetros para aligerar la notación, tendríamos, por una parte, $M \models \varphi(0)$, ya que $0 \in I$; por otra, $M \models \varphi(x) \to \varphi(x+1)$ para cada $x \in I$, ya que I es cerrado bajo la operación de sucesor; y $M \models \varphi(x) \to \varphi(x+1)$ para cada $x \in M \setminus I$, por ser falsa la mayor. Es decir que

$$M \models \varphi(0) \land \forall x(\varphi(x) \to \varphi(x+1)),$$

y por tanto, aplicando inducción, $M \models \forall x \varphi(x)$; pero esto contradice nuestra hipótesis de que el corte es propio. □

Es claro que *desde fuera* es facilísimo definir cortes a partir de cualquier elemento no estándar $a \in M$: por ejemplo,

$$I = \{x \in M : x < a \wedge a - x > \mathbb{N}\}$$

es claramente un corte; el problema es que la relación $x > \mathbb{N}$ (es decir, la propiedad "x es no estándar") no es definible en M, ya que M "cree" que todos sus elementos son estándar.

3.5 *Overspill* y *underspill*

Lema 3.13 (Overspill)**.** *Sea $M \models PA$ no estándar, y sea I un corte propio de M. Si una fórmula [eventualmente con parámetros en M] se satisface para todos los elementos de I, entonces hay un elemento $c > I$ tal que la fórmula también se satisface para todos los $x < c$, es decir, la (satisfacción de la) fórmula se ha "'derramado más allá de" I. Más formalmente: sea $\vec{a} \in M$, y sea $\varphi(x, \vec{y})$ una fórmula tal que*

$$M \models \varphi(b, \vec{a}) \text{ para cada } b \in I;$$

entonces hay un $c > I$ en M tal que

$$M \models \forall x < c\ \varphi(x, \vec{a}).$$

Prueba. Si fuesen verdaderas las hipótesis del lema pero no existiese un tal c, tendríamos que, por una parte, para cada $c \in M \setminus I$ existiría un $x < c$ tal que $\neg\varphi(x, \vec{a})$; por otra parte, es inmediato que para todos los elementos $c \in I$ se da que $\forall x < c\ \varphi(x, \vec{a})$; pero entonces I estaría definido por esta última fórmula, es decir,

$$I = \{y \in M : \forall x < y\ \varphi(x, \vec{a})\},$$

lo que es imposible en virtud del lema 3.12. □

Una consecuencia trivial del lema es que si $\varphi(x)$ es válida para todos los $n \in \mathbb{N}$ estándar, entonces hay un c no estándar tal que $\varphi(x)$ es válida para todos los $x < c$.

Ejemplos: (1) Consideremos el segmento inicial $a^{1/\mathbb{N}} \subseteq_{\mathrm{e}} M$ de la definición 3.10; veremos que no puede ser $\mathbb{N} = a^{1/\mathbb{N}}$. En efecto, si consideramos la fórmula

$$\varphi(x, a) \equiv \exists z(z \geq x \wedge z^x < a),$$

es claro que $M \models \varphi(n, a)$ para cada $n \in \mathbb{N}$, ya que $n^n \in \mathbb{N} < a$. Por tanto, por *overspill* debe de existir un $b > \mathbb{N}$ tal que $M \models \varphi(b, a)$, de donde existirá un $c \in M$ tal que $M \models c \geq b \wedge c^b < a$. Pero ahora $c \geq b > \mathbb{N}$, es decir, c es no estándar; y, como $c^b < a$ y $b > \mathbb{N}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ es $c^n < c^b < a$, y por tanto $c \in a^{1/\mathbb{N}} \setminus \mathbb{N} \neq \emptyset$.

(2) $a^{1/\mathbb{N}} \not\models PA$. [Ver Kaye 1991 [4], ejer. 6.4(1)] Consideremos

$$\varphi(n, a) \equiv \exists b(b^n \leq a < b^{n+1}).$$

Esta fórmula no se satisface en el caso general: por ejemplo, si $n = a = 2$, el mayor b tal que $b^2 \leq 2$ es 1, y claramente $1^{2+1} = 1 < 2$. Ahora bien: si $a > \mathbb{N}$

y $n \in \mathbb{N}$, entonces debe de haber algún b tal que $M \models b^n \leq a < b^{n+1}$. ¿Cómo podemos demostrarlo? Por un lado, $M \models m^n \leq a$ para cada $m \in \mathbb{N}$, por ser $a > \mathbb{N}$, y por tanto, aplicando *overspill*, hay un $c > \mathbb{N}$ tal que $M \models c^n \leq a$; por otro lado, claramente, $M \models (a+1)^n > a$. El máximo b tal que $b^n \leq a$ tiene que existir, también por *overspill*; para ese b es $(b+1)^n > a$, y como $b^{n+1} > (b+1)^n$, es $a < b^{n+1}$. Además, como $b > n+1$, es $M \models b^b > a$. Pero ahora $b \in a^{1/\mathbb{N}}$ con $b^b > a \notin a^{1/\mathbb{N}}$, y por tanto $a^{1/\mathbb{N}} \not\models PA$.

Lema 3.14 (*Overspill*, versión cofinal)**.** *Sean $M \models PA$ no estándar e I un corte propio de M. Si una fórmula [eventualmente con parametros en M] se satisface cofinalmente en I, entonces también se satisface coinicialmente en el complemento $M \setminus I$ del corte I. Dicho de otro modo, si una fórmula se satisface para valores arbitrariamente grandes de I, entonces también se satisface para valores arbitrariamente pequeños de $M \setminus I$.*

Formalmente: sea $\vec{a} \in M$, y consideremos una fórmula $\varphi(x, \vec{z})$ tal que para todo $x \in I$ existe un $y \in I$ tal que

$$M \models (y > x) \wedge \varphi(y, \vec{a});$$

entonces para cada $c \in M \setminus I$ existe un $b \in M \setminus I$ tal que

$$M \models (b < c) \wedge \varphi(b, \vec{a}).$$

Prueba. Sea $c \in M \setminus I$ arbitrario (c existe porque I es propio), y consideremos la fórmula

$$\psi(x) \equiv \exists y(x \leq y < c \wedge \varphi(y, \vec{a})).$$

Como φ se satisface cofinalmente en I, ψ es verdadera en todo I, y, aplicando el lema 3.13 de *overspill*, existe un $b > I$ tal que

$$M \models \forall x < b \exists y(x \leq y < c \wedge \varphi(y, \vec{a})).$$

Pero, como $c > I$ es arbitrario, basta con tomar cualquier $x < \min(b, c)$ con $x > I$ para tener un $y < c$ con $y > x > I$, y por tanto $y > I$ y $\varphi(y, \vec{a})$, con lo que $\varphi(x, \vec{a})$ se satisface coinicialmente en $M \setminus I$. $\square$

A los lemas de *overspill* sobre les corresponden como consecuencias sendos lemas de *underspill*.

Lema 3.15 (*Underspill*)**.** *Sean $M \models PA$ no estándar e $I \subseteq M$ un corte propio de M. Si una fórmula [eventualmente con parámetros en M] se satisface en el complemento del corte I, entonces hay un elemento $c \in I$ tal que la fórmula también se satisface para todos los $x > c$, es decir, la (satisfacción de la) fórmula se ha "derramado más acá" del complemento de I. Más formalmente: sea $\vec{a} \in M$, y sea $\varphi(x, \vec{y})$ una fórmula tal que*

$$M \models \varphi(x, \vec{a}) \text{ para cada } x \in M \setminus I;$$

entonces hay un $c \in I$ tal que

$$M \models \forall x > c\ \varphi(x, \vec{a}).$$

Prueba. El conjunto de los $x \in I$ tales que $\neg\varphi(x, \vec{a})$ no puede ser cofinal en I, ya que de lo contrario, aplicando el lema 3.14, habría algún $y > I$ tal que $\neg\varphi(y, \vec{a})$, lo que contradice nuestra hipótesis. $\square$

Lema 3.16 (*Underspill*, versión cofinal)**.** *Sean $M \models PA$ no estándar, e $I \subseteq M$ un corte propio de M. Si una fórmula [eventualmente con parámetros en M] se satisface coinicialmente en $M \setminus I$, entonces también se satisface cofinalmente en I. Más formalmente: sea $\vec{a} \in M$, y sea $\varphi(x, \vec{y})$ una fórmula tal que para cada $c > I$, $c \in M$, existe un $x > I$ tal que*

$$M \models x < c \wedge \varphi(x, \vec{a});$$

entonces para cada $b \in I$ existe un $y \in I$ tal que

$$M \models y \geq b \wedge \varphi(y, \vec{a}).$$

Prueba. Supongamos, en busca de una contradicción, que existe un $b \in I$ tal que $M \models \neg\varphi(y, \vec{a})$ para cada $y \geq b$ de I. Entonces $M \models y < b \vee \neg\varphi(y, \vec{a})$ para cada $y \in I$, y aplicando el lema 3.13 de *overspill* a I, hay un $c > I$ tal que

$$M \models \forall y \leq c(y < b \vee \neg\varphi(y, \vec{a})),$$

lo que contradice la hipótesis. □

3.6 *Overspill* e inducción

Lema 3.17 (*Overspill* implica inducción (Ver Kaye 1991 [4], ejer. 6.1))**.** *Sea $M \models PA^-$ un modelo de la Aritmética de Peano sin el axioma de inducción, y supongamos que el lema de* overspill *se cumple para cortes arbitrarios $I \subseteq M$. Entonces $M \models PA$.*

Prueba. Sea $\vec{a} \in M$, y consideremos una fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ tal que

$$M \models \varphi(0, \vec{a}) \wedge \forall x(\varphi(x, \vec{a}) \rightarrow \varphi(x + 1, \vec{a})).$$

Consideremos ahora el conjunto

$$I = \{x \in M : M \models \forall y < x\ \varphi(y, \vec{a})\};$$

es claro que I es un corte en M; además, no puede ser un corte propio, ya que entonces sería un corte propio definible, lo cual es imposible; por tanto, $I = M$, y el principio de inducción se verifica para φ. Pero φ era arbitraria, y por tanto $M \models PA$. □

Corolario 3.18. *Sea $M \models PA^-$. Entonces $M \models Ind$ si y sólo si en M se cumple el lema de* overspill *para cortes arbitrarios $I \subseteq M$.*

3.7 Subestructuras y PA^-

Lema 3.19. *Sean $M \subseteq_e N$ L_{PA}-estructuras, y supongamos que $N \models PA^-$. Entonces, $M \models PA^-$.*

Prueba. Todos los axiomas de PA^- son Π_1 excepto S3. Sea $x \in M$, $x \neq 0$. Como $M \subseteq N$, $N \models \exists y(Sy = x)$; pero $y < x$, y por tanto $y \in M$. □

¿Tienen sentido las definiciones de segmento inicial y extensión final, o coinciden con la noción de subestructura (en cuyo caso serían superfluas)? Es decir, si una subestructura M de N es cerrada bajo suma y producto, ¿es automáticamente un segmento inicial? Si la respuesta a la pregunta anterior es "no", entonces habrá subestructuras M de N que serán "más ralas" que N; y, a la inversa, desde el punto de vista de N, habrá estructuras más "tupidas". La siguiente definición fija el concepto, y a continuación unos ejemplos demuestran la existencia de esas estructuras "más tupidas".

4 Extensiones cofinales

Definición 4.1. *Sean $M \subseteq N$ modelos de PA^- (= PA sin inducción). Decimos que M es **cofinal** en N, o que N es una extensión **cofinal** de M, y escribimos $M \subseteq_{\text{cf}} N$, sii*

$$\forall a \in N \ \exists b \in M \ (N \models b \geq a).$$

Es decir, $M \subseteq_{\text{cf}} N$ sii hay elementos de M arbitrariamente grandes en N.

Ejemplo: $\mathbb{N}$ no tiene extensiones cofinales propias: trivialmente, si fuese $\mathbb{N} \subsetneq_{\text{cf}} M$, con $M \models PA^-$, habría un $a \in M$ no estándar, y para ese a ningún elemento $n \in \mathbb{N}$ cumple $n \geq a$.

Lema 4.2. *Si $M \models PA^-$ es no estándar, entonces existe un modelo $N \models PA^-$ no estándar que es una extensión cofinal propia de M: $M \subsetneq_{\text{cf}} N$.*

Prueba. Consideremos el lenguaje $L_{M,c}$ obtenido añadiendo al lenguaje de la aritmética L_{PA} constantes para cada elemento de M y una nueva constante c. Sean $b \in M$ no estándar. Por compacidad, la teoría

$$\{\varphi(\overline{a}) : \overline{a} \in M \models \varphi(\overline{a}), \varphi \in \text{Fm}(L_{PA})\} \cup \{c \neq a : a \in M\} \cup \{c < b\}$$

tiene un modelo K. Si ahora consideramos $f : M \to K$ definida por $f(a) = a^K$, es claro que podemos considerar K como una extensión elemental de M. Consideremos el segmento inicial $N \subseteq K$ con dominio $\{d \in K : K \models d < a$ para algún $a \in M\}$. a) N es una L_{PA}-estructura: si $a_1, a_2 \in N$, hay $b_1, b_2 \in M$ tales que $a_1 < b_1$ y $a_2 < b_2$, y por tanto $K \models a_1 + a_2 < b_1 + b_2$ y $K \models a_1 \cdot a_2 < b_1 \cdot b_2$ y por tanto $a_1 + a_2, a_1 \cdot a_2 \in K$. b) $M \subseteq_{\text{cf}} N$: si $a \in N$, por definición de N hay un $b \in M$ tal que $K \models a < b$, es decir, $N \models a < b$. Por el lema 3.19, $N \models PA^-$, y como $c \notin M$ y $c \in N$, N es una extensión cofinal propia de M. $\square$

El objetivo de esta sección es demostrar que todo modelo de PA tiene una extensión final elemental propia que es también modelo de PA. Para poder demostrar esto, precisaremos de algunos medios técnicos que definimos a continuación.

Definición 4.3 (Axiomas de colección)**.** *Para cada fórmula $\varphi(x, y, \vec{v}) \in L_{PA}$, el correspondiente **axioma de colección** es*

$$\forall \vec{a} \forall b[(\forall x < b)\exists y \varphi(x, y, \vec{a}) \to \exists w(\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a})].$$

Observación 4.4. *Como de $\exists w(\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a})$ se deduce inmediatamente $(\forall x < b)\exists y \varphi(x, y, \vec{a})$, el axioma de colección para φ podría haberse escrito como una equivalencia:*

$$\forall \vec{a} \forall b[(\forall x < b)\exists y \varphi(x, y, \vec{a}) \leftrightarrow \exists w(\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a})].$$

Además, tomando negaciones y poniendo φ en vez de $\neg\varphi$,

$$\forall \vec{a} \forall b[(\exists x < b)\forall y \varphi(x, y, \vec{a}) \leftrightarrow \forall w(\exists x < b)(\forall y < w)\varphi(x, y, \vec{a})].$$

Lema 4.5. *Sea $\varphi(x, y, \vec{u})$ es una fórmula Σ_n, es decir, supongamos que*

$$\varphi(x, y, \vec{u}) \equiv \exists v_1 \forall v_2 ... Q_n v_n \psi(x, y, \vec{u}, \vec{v}),$$

donde ψ es Δ_0 y Q_n es $\exists$ si n es impar, y $\forall$ en otro caso. Entonces colección implica que para cada b y cada $\vec{a}$,

$$(\forall x < b)\varphi(x, y, \vec{a})$$

es equivalente a una fórmula Σ_n. Similarmente, si $\varphi(x, y, \vec{u})$ es Π_n, colección implica que para cada b y cada $\vec{a}$,

$$(\exists x < b)\varphi(x, y, \vec{a})$$

es equivalente a una fórmula Π_n.

Prueba. Por inducción en n, y aplicando la observación 4.4. □

Teorema 4.6 (PA demuestra colección)**.** *PA demuestra los axiomas de colección para cada fórmula $\varphi \in L_{PA}$.*

Prueba. Sea $M \models PA$, y supongamos que para cada $\vec{a} \in M$,

$$M \models (\forall x < b)\exists y\varphi(x, y, \vec{a}),$$

es decir, $M \models \psi(b, \vec{a})$, con $\psi(b, \vec{a}) \equiv (\forall x < b)\exists y\varphi(x, y, \vec{a})$.

Procederemos por inducción sobre b: si $b = 0$, ningún x cumple $x < b$, y por tanto para un w arbitrario

$$M \models (\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a}),$$

de donde

$$M \models \exists w(\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a}).$$

Supongamos ahora, como hipótesis inductiva, que para un b determinado tenemos colección, y además que para cada $\vec{a} \in M$,

$$M \models (\forall x < b + 1)\exists y\varphi(x, y, \vec{a}),$$

es decir,

$$M \models (\forall x < b)\exists y\varphi(x, y, \vec{a}) \land \exists z\varphi(b, z, \vec{a}),$$

de donde, por una parte,

$$M \models (\forall x < b)\exists y\varphi(x, y, \vec{a})$$

y aplicando la hipótesis inductiva

$$M \models \exists w(\forall x < b)(\exists y < w)\varphi(x, y, \vec{a}),$$

y por otra parte

$$M \models \exists z\varphi(b, z, \vec{a}),$$

de donde hay un $c \in M$ tal que $M \models \varphi(b, c, \vec{a})$. Basta con tomar $w' = \max(w, c+1)$ para tener

$$M \models \exists w'(\forall x < b + 1)(\exists y < w')\varphi(x, y, \vec{a}),$$

como deseábamos. □

Proposición 4.7 (Ver Kaye 1991 [4], prop. 7.6)**.** *Sean $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N$ modelos de PA^{-}, y supongamos además que $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$. Si M y N satisfacen los axiomas de colección, entonces $M \preccurlyeq N$.*

Prueba. Clasificamos las fórmulas por su posición en la jerarquía aritmética, y demostramos la proposición por inducción en esa posición.

Para $n = 0$, es $\Sigma_0 = \Pi_0 = \Delta_0$ por definición, y por tanto $M \preccurlyeq_{\Sigma_0} N$.

Supongamos ahora que $M \preccurlyeq_{\Sigma_n} N$ para un n dado, y tomemos

$$\varphi(\vec{y}) \equiv \exists\vec{x}\theta(\vec{x},\vec{y}) \in \Sigma_{n+1},$$

es decir, $\theta(\vec{x},\vec{y}) \in \Pi_n$. Por el test de Tarski-Vaught, será suficiente con mostrar que para cada $\vec{a} \in M$, si

$$N \models \exists\vec{x}\theta(\vec{x},\vec{a})$$

entonces

$$M \models \exists\vec{x}\theta(\vec{x},\vec{a}).$$

Si $N \models \exists\vec{x}\theta(\vec{x},\vec{a})$, como $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N$, hay un $b \in M$ tal que $N \models (\exists\vec{x} < b)\theta(\vec{x},\vec{a})$. Pero ahora, por el lema 4.5, $(\exists\vec{x} < b)\theta(\vec{x},\vec{a})$ es equivalente a una proposición Π_n:

$$\forall\vec{a}, b[(\exists\vec{x} < b)\theta(\vec{x},\vec{a}) \leftrightarrow \psi(\vec{a}, b)],$$

y por tanto

$$N \models \psi(\vec{a}, b),$$

de donde $M \models \psi(\vec{a}, b)$ (ya que si fuese $M \models \neg\psi(\vec{a}, b)$, como $\neg\psi$ es Σ_n y por hipótesis inductiva $M \preccurlyeq_{\Sigma_n} N$, entonces $N \models \neg\psi(\vec{a}, b)$, lo que es absurdo). $\square$

Proposición 4.8. *Supongamos que $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N$ son modelos de PA^{-} tales que $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$ y $M \models PA$. Entonces $M \preccurlyeq N$, y por tanto también $N \models PA$.*

Prueba. Primero demostraremos que $M \preccurlyeq_{\Sigma_2} N$.

Bastará con mostrar que si $\vec{a} \in M$ y $\theta(\vec{x}) \in \Sigma_2$, entonces $N \models \theta(\vec{a}) \Rightarrow M \models \theta(\vec{a})$, ya que si $\vec{a} \in M \models \psi(\vec{a})$ y $\psi(\vec{a}) \in \Sigma_2$ es de la forma $\exists\vec{x}\varphi(\vec{a},\vec{x})$ con $\varphi(\vec{a},\vec{x}) \in \Pi_1$, entonces $M \models \varphi(\vec{a},\vec{b})$ para algún $\vec{b} \in M$, y como $\neg\varphi(\vec{a},\vec{b})$ es Σ_2, entonces $N \not\models \neg\varphi(\vec{a},\vec{b})$, esto es, $N \models \varphi(\vec{a},\vec{b})$.

Así, supongamos que $\theta(\vec{x})$ es $\exists\vec{y}\forall\vec{z}\psi(\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ con $\psi \in \Delta_0$ y $\vec{a} \in M$, y que $N \models \theta(\vec{a})$. Como $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N$, hay un $b \in M$ tal que $N \models (\exists\vec{y} < b)\forall\vec{z}\psi(\vec{a},\vec{y},\vec{z})$, es claro que para cada $c \in M$ es $N \models (\exists\vec{y} < b)(\forall\vec{z} < c)\psi(\vec{a},\vec{y},\vec{z})$. Como ψ es Δ_0 y $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$,

$$M \models \forall w(\exists\vec{y} < b)(\forall\vec{z} < w)\psi(\vec{a},\vec{y},\vec{z}),$$

y, aplicando colección en M,

$$M \models (\exists\vec{y} < b)\forall\vec{z}\psi(\vec{a},\vec{y},\vec{z}),$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ahora mostraremos que para cada $n \geq 2$, $M \preccurlyeq_{\Sigma_n} N \Rightarrow M \preccurlyeq_{\Sigma_{n+1}} N$, completando la demostración (aquí es donde necesitamos la hipótesis suplementaria de que M satisface inducción y no sólo colección). En vez de demostrar que, si $\theta(\vec{a}) \in \Sigma_{n+1}$ con $\vec{a} \in M$, entonces $N \models \theta(\vec{a}) \Rightarrow M \models \theta(\vec{a})$, demostraremos la siguiente aserción equivalente: si $\vec{a} \in M$ y $\psi(\vec{a}) \in \Pi_{n+1}$, entonces $M \models \psi(\vec{a}) \Rightarrow N \models \psi(\vec{a})$.

Supongamos para simplificar que $y = \vec{y}$ y $z = \vec{z}$ son variables, sea $\vec{a} \in M$, y por tanto sea $\psi(\vec{a} \equiv \forall y \exists z \varphi(\vec{a}, y, z)$, con $\varphi \in \Pi_{n-1}$. Sea $b \in M$ arbitrario. Basta con demostrar que

$$M \models \forall y < b \exists z \varphi(\vec{a}, y, z) \Rightarrow N \models \forall y < b \exists z \varphi(\vec{a}, y, z),$$

ya que $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N$. Pero si $M \models \forall y < b \exists z \varphi(\vec{a}, y, z)$, entonces por inducción en M tenemos

$$M \models \exists w \forall y < b \forall z (z = (w)_y \to \varphi(\vec{a}, y, z)),$$

y por tanto, dado que esta fórmula es Σ_n y $M \preccurlyeq_{\Sigma_n} N$,

$$N \models \exists w \forall y < b \forall z (z = (w)_y \to \varphi(\vec{a}, y, z)).$$

Como $\forall y \forall w \exists z (z = (w)_y)$ es Π_2 y verdadera en M, es también verdadera en N ya que $M \preccurlyeq_{\Sigma_2} N$, de modo que

$$N \models \forall y < b \exists z \varphi(\vec{a}, y, z),$$

como queríamos demostrar. □

Enunciamos el siguiente teorema, conocido como Teorema MRDP por las iniciales de los matemáticos que colaboraron en su establecimiento, Matijašević, Davis, Robinson y Putnam, sin dar su demostración, que nos apartaría demasiado de nuestro tema. (Pueden encontrarse demostraciones del teorema en [5], [1] o [2].)

Definición 4.9. *Una relación $E(x_1, ..., x_n)$ es* ***elemental*** *si existe un polinomin $p(x_1, ..., x_n)$ tal que*

$$E(x_1, ..., x_n) = (p(x_1, ..., x_n) = 0).$$

Una relación $D(x_1, ..., x_n)$ es ***diofántica*** *si existe un $m \geq 0$ una relación elemental $E(x_1, ...x_n, y_1, ..., y_m)$ tal que*

$$D(x_1, ..., x_n) = \exists y_1 ... \exists y_n E(x_1, ...x_n, y_1, ..., y_m).$$

Teorema 4.10 (Teorema MRDP, primera versión)**.** *Una relación es recursivamente enumerable sii es diofántica*

Una dirección es obvia. Como las relaciones recursivamente enumerables son las definibles mediante fórmulas Σ_1, lo que el teorema dice es que toda relación recursivamente enumerable es equivalente a una formula formada por una serie de existenciales seguidas de la igualación de un polinomio a cero. Podemos pues reformular el teorema de un modo que nos resultará más útil:

Teorema 4.11 (Teorema MRDP para PA, segunda versión)**.** *Para cada fórmula Σ_1 $\varphi(\vec{x})$ de L_{PA} hay una fórmula $\exists_1$ $\psi(\vec{x})$ de L_{PA} tal que*

$$PA \vdash \forall \vec{x} (\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})).$$

Corolario 4.12. *Sean $M \subseteq N$ modelos de PA. Entonces, $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$.*

Prueba. Sea $\vec{a} \in M$, y tomemos $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0$. Tanto $\theta(\vec{x})$ como $\neg\theta(\vec{x})$ son trivialmente Σ_1, por lo que, aplicando el teorema MRDP, hay fórmulas sin cuantificadores $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ y $\psi(\vec{x}, \vec{z})$ tales que

$$PA \vdash \forall \vec{x}(\theta(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{y} \varphi(\vec{x}, \vec{y}))$$

y

$$PA \vdash \forall \vec{x}(\neg\theta(\vec{x}) \leftrightarrow \exists \vec{z} \psi(\vec{x}, \vec{z})).$$

Así, si $M \models \theta(\vec{a})$, hay $\vec{b} \in M$ con $M \models \varphi(\vec{a}, \vec{b})$, y por tanto, como $N \models PA$, también $N \models \theta(\vec{a})$; similarmente, si $M \models \neg\theta(\vec{a})$, entonces hay $\vec{c} \in M$ con $M \models \psi(\vec{a}, \vec{c})$, y $N \models \neg\theta(\vec{a})$. □

Teorema 4.13. *Sean $M \models PA$ y $M \subseteq_{\mathrm{cf}} N \models PA^-$. Son equivalentes:*
(a) $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$;
(b) $N \models PA$;
(c) $M \preccurlyeq N$.

Prueba. Por la proposición 4.8, $a \Rightarrow b$ y $a \Rightarrow c$; $b \Rightarrow a$) por el corolario 4.12; y $c \Rightarrow a$ es inmediato. □

Corolario 4.14. *Si $M \subseteq N$ son modelos de PA, entonces existe un único $K \models PA$ tal que $M \subseteq_{\mathrm{cf}} K \subseteq_{\mathrm{e}} N$; y además, $M \preccurlyeq K$.*

Prueba. Como K tiene que ser un segmento inicial de N y M tiene que ser cofinal en K, sólo hay una manera de definir K:

$$K = \{a \in N : N \models a < b \text{ para algún } b \in M\};$$

es inmediato que $M \subseteq_{\mathrm{cf}} K$. Para ver que $K \models PA$ es suficiente, por el teorema 4.13, ver que $M \preccurlyeq_{\Delta_0} K$; pero $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$ por el teorema MRDP; y $K \preccurlyeq_{\Delta_0} N$ porque $K \subseteq_{\mathrm{e}} N$; y por tanto, si $\theta(\vec{x}) \in \Delta_0$ y $\vec{a} \in M$, entonces

$$M \models \theta(\vec{a}) \text{ sii } N \models \theta(\vec{a}) \text{ sii } K \models \theta(\vec{a}),$$

de modo que $M \preccurlyeq_{\Delta_0} K$. □

Corolario 4.15. *Cualquier modelo no estándar $M \models PA$ tiene una extensión elemental cofinal propia N.*

Prueba. Siguiendo los pasos del ejemplo 2, sea $K \succcurlyeq M$ con un elemento $c \in K \setminus M$ tal que $K \models c < b$ para algún no estándar $b \in M$, y hagamos

$$N = \{d \in M : K \models d < a \text{ para algún } a \in M\};$$

por la demostración del corolario 4.14, $N \succcurlyeq_{\Delta_0} M$, y por la proposición 4.8, $M \preccurlyeq N \models PA$. □

Teorema 4.16 (Ver Kaye 1991 [4], teor. 2.7)**.** *Sean $M \subseteq_{\mathrm{e}} N$ dos L_{PA}-estructuras tales que N es una extensión final de M. Entonces $M \preccurlyeq_{\Delta_0} N$.*

Prueba. Por inducción en la complejidad de las fórmulas Δ_0, definida como el número de símbolos $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\exists$ o $\forall$ que aparecen en la fórmula. La hipótesis de inducción es que

$$\begin{array}{l}\text{para cada } \varphi(\vec{x}) \in \Delta_0 \text{ con complejidad} \leq n \\ \text{y para todo } \vec{a} \in M \text{ se cumple} \\ M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\vec{a}).\end{array} \tag{1}$$

Para $n = 0$ la hipótesis de inducción se cumple inmediatamente, ya que las fórmulas de complejidad 0 son atómicas.

Supongamos ahora que (1) se cumple, sea $\varphi(\vec{x}) = \varphi_1(\vec{x}) \wedge \varphi_2(\vec{x})$ de complejidad $n+1$, y sea $\vec{a} \in M$. Entonces

$$\begin{array}{ll} & M \models \varphi(\vec{a}) \\ \Leftrightarrow & M \models \varphi_1(\vec{a}) \text{ y } M \models \varphi_2(\vec{a}) \\ \Leftrightarrow & N \models \varphi_1(\vec{a}) \text{ y } N \models \varphi_2(\vec{a}) \text{ por (1)} \\ \Leftrightarrow & N \models \varphi(\vec{a}).\end{array}$$

Mediante argumentos similares demostramos los casos $\vee$ y $\neg$. Si $\varphi(\vec{x})$ es $\forall y < t(\varphi_1(\vec{x}, y)$ es de complejidad $n+1$ y $\vec{a} \in M$, entonces

$$\begin{array}{ll} & M \models \varphi(\vec{a}) \\ \Leftrightarrow & \text{para todo } b < t(\vec{a}) \text{ de } M, M \models \varphi_1(\vec{a}, b);\end{array}$$

ahora bien: si $\vec{a} \in M$, también $t(\vec{a}) \in M$, ya que M es cerrado bajo $+$ y $\cdot$, y, como $M \subseteq_{\mathrm{e}} N$, entonces

$$\{b \in N : N \models b < t(\vec{a})\} = \{b \in M : M \models b < t(\vec{a}),$$

de modo que, por (1), deducimos

$$\begin{array}{ll} & M \models \varphi(\vec{a}) \\ \Leftrightarrow & \text{para todo } b < t(\vec{a}) \text{ de } N, N \models \varphi_1(\vec{a}, b) \\ \Leftrightarrow & N \models \varphi(\vec{a}).\end{array}$$

El caso $\exists$ se demuestra exactamente de la misma manera. $\square$

5 Generalidades sobre teoría de modelos

5.1 Clausuras definibles

Definición 5.1 (Elementos definibles)**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, y $M \models T$. Consideremos un subconjunto (no necesariamente un submodelo) $A \subseteq M$. Un elemento $b \in M$ se llama **definible en** M **sobre** A (o A-**definible en** M) sii hay una L-fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que $M \models \exists! x\varphi(x, \vec{a})$ y b es ese único elemento de M, es decir, si $M \models \varphi(b, \vec{a})$.*

La definición precedente admite una generalización inmediata:

Definición 5.2 (Tuplas definibles)**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, y $M \models T$. Consideremos un subconjunto (no necesariamente un submodelo) $A \subseteq M$. Una tupla $\vec{b} = b_1, ..., b_n \in M$ se llama **definible en** M **sobre** A (o A-**definible en** M) sii hay una L-fórmula $\varphi(x_1, ..., x_n, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que*

$$M \models \exists! x_1 ... x_n \varphi(x_1, ..., x_n, \vec{a})$$

y $\vec{b} = b_1, ..., b_n$ es esa única tupla de M, es decir, si $M \models \varphi(b_1, ..., b_n, \vec{a})$.

Definición 5.3 (Clausura definible)**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría y $M \models T$. Consideremos un subconjunto $A \subseteq M$. Definimos la **clausura definible** de A del siguiente modo:*

$$\mathrm{dcl}_M(A) := \{a \in M : a \text{ es } A\text{-definible en } M\}.$$

Lema 5.4 (Propiedades del operador "dcl")**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, $M \models T$ y $A \subseteq M$ un subconjunto de M. Entonces,*

(1) $A \subseteq \mathrm{dcl}_M(A)$;

(2) $A \subseteq B \subseteq M \Rightarrow \mathrm{dcl}_M(A) \subseteq \mathrm{dcl}_M(B)$ (Monotonía);

(3) $\mathrm{dcl}_M(\mathrm{dcl}_M(A)) = \mathrm{dcl}_M(A)$;

(4) Si $a \in \mathrm{dcl}_M(A)$, entonces existe un $A_0 \subseteq A$ finito (es decir, $|A_0| < \omega$) tal que $a \in \mathrm{dcl}_M(A_0)$ (Finitariedad).

Prueba. (1) Sea $a \in A$; entonces $a \in \mathrm{dcl}_M(A)$, ya que a es A-definible por la L_{PA}-fórmula $x = a$.

(2) Supongamos que $A \subseteq B \subseteq M$, y sea $c \in \mathrm{dcl}_M(A)$; entonces hay una L-fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que $M \models \exists! x\varphi(x, \vec{a})$ y $M \models \varphi(c, \vec{a})$. Pero como $A \subseteq B$, $\vec{a} \in B$, con lo que $c \in \mathrm{dcl}_M(B)$.

(3) (a) $\mathrm{dcl}_M(\mathrm{dcl}_M(A)) \supseteq \mathrm{dcl}_M(A)$: aplicar (1) substituyendo A por $\mathrm{dcl}_M(A)$.

(3) (b) $\mathrm{dcl}_M(\mathrm{dcl}_M(A)) \subseteq \mathrm{dcl}_M(A)$: sea $c \in \mathrm{dcl}_M(\mathrm{dcl}_M(A))$; entonces existe una L-fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in \mathrm{dcl}_M(A)$ tal que $M \models \exists! x\varphi(x, \vec{a})$, y $M \models \varphi(c, \vec{a})$. Supongamos que $\vec{a} = a_1, ..., a_n$; entonces, para cada $1 \leq i \leq n$, $a_i \in \mathrm{dcl}_M(A)$, es decir, hay una L-fórmula $\varphi_i(y_i, \vec{z}^i)$ y una tupla $\vec{a}^i \in A$ tales que $M \models \exists! y_i \varphi_i(y_i, \vec{a}^i)$ y $M \models \varphi_i(a_i, \vec{a}^i)$. Por tanto

$$M \models \exists! x \big\{ \exists y_1 ... y_n \big[\bigwedge_{i=1}^{n} \varphi_i(y_i, \vec{a}^i) \wedge \varphi(x, y_1, ..., y_n) \big] \big\},$$

y poniendo $\vec{e} = \vec{a^1}, ..., \vec{a^n}$ es claramente $\vec{e} \in A$, y por tanto $c \in \mathrm{dcl}_M(A)$.

(4) Sea $a \in \mathrm{dcl}_M(A)$. Entonces existen una L-fórmula φ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que $M \models \exists! x\varphi(x, \vec{a})$ y $M \models \varphi(b, \vec{a})$. Supongamos que es $\vec{a} = a_1, ..., a_n$; si

ahora tomamos $A_0 = \{a_1, ..., a_n\}$, es inmediato que $a \in \mathrm{dcl}_M(A_0)$, y además A_0 es finito. $\square$

Lema 5.5. *Sea $L \supseteq L_{PA}$, $T \supseteq PA$ una L-teoría (con el axioma de inducción para cada fórmula de L), y $M \models T$. Consideremos $A \subseteq M$ un subconjunto de M. Entonces,*

$$\mathrm{dcl}_M(A) \preccurlyeq M.$$

Prueba. Para ver que se trata de una subestructura elemental usaremos el test de Tarski. Sea pues $\vec{a} \in \mathrm{dcl}_M(A)$ una tupla, y sea $\varphi(\vec{x}, y)$ una L-fórmula tal que

$$M \models \exists y \varphi(\vec{a}, y).$$

Por el principio del número mínimo (LNP),

$$M \models \exists y(\varphi(\vec{a}, y) \wedge \forall z < y \neg\varphi(\vec{a}, z));$$

sea $b \in M$ tal que $M \models \varphi(\vec{a}, b) \wedge \forall z < b \neg\varphi(\vec{a}, z)$: claramente $b \in \mathrm{dcl}_M(\vec{a}) \subseteq \mathrm{dcl}_M(A)$. $\square$

Lema 5.6. *Sea $L \supseteq L_{PA}$, $T \supseteq PA$ una L-teoría (con el axioma de inducción para cada fórmula de L), y $M \models T$. Consideremos $A \subseteq M$ un subconjunto de M. Entonces,*

(1) $\mathrm{dcl}_M(\emptyset) = \mathrm{dcl}_M(\mathbb{N})$.

(2) En el caso general, puede ser $\mathrm{dcl}_M(\mathbb{N}) \supsetneq \mathbb{N}$.

Prueba. (1) En $\mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ podemos referirnos a cada $n \in \mathbb{N}$ como $S^n 0$; y en $\mathrm{dcl}_M(\mathbb{N})$, podemos referirnos a cada $n \in \mathbb{N}$ directamente.

(2) Sea $m_k = n$ la L_{PA}-fórmula que expresa que la k-esima iteración del proceso de Goodstein sobre m es n. Como $PA \nvdash \forall m \exists k(m_k = 0)$, hay algún modelo $M \models PA$ tal que $M \models \exists m \forall k(m_k \neq 0)$, y por el LNP, $M \models \exists m(\forall k(m_k \neq 0) \wedge \forall p < m \exists k(p_k = 0))$. Claramente un tal m es único, pertenece a $\mathrm{dcl}_M(\mathbb{N})$, y tiene que ser no estándar, porque $\mathbb{N} \models \forall m \exists k(m_k = 0)$. $\square$

Lema 5.7. *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, y $M \models T$. Supongamos que $M \preccurlyeq N$, y sea $A \subseteq M$ un subconjunto de M, es decir,*

$$A \subseteq M \preccurlyeq N.$$

Entonces,

$$\mathrm{dcl}_M(A) = \mathrm{dcl}_N(A).$$

Prueba. Si $b \in \mathrm{dcl}_M(A)$, entonces hay una L-fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que $M \models \exists! x \varphi(x, \vec{a})$ y $M \models \varphi(b, \vec{a})$. Como $A \subseteq M$, $\vec{a} \in M$, y como $M \preccurlyeq N$,

$$M \models \exists! x \varphi(x, \vec{a}) \Leftrightarrow N \models \exists! x \varphi(x, \vec{a}),$$

y por tanto $N \models \exists! x \varphi(x, \vec{a})$; del mismo modo, $N \models \varphi(b, \vec{a})$. De este modo, $b \in \mathrm{dcl}_N(A)$.

Inversamente, si $b \in \mathrm{dcl}_N(A)$, entonces hay una L-fórmula $\varphi(x, \vec{y})$ y una tupla $\vec{a} \in A$ tal que $N \models \exists! x \varphi(x, \vec{a})$ y $N \models \varphi(b, \vec{a})$. Como en el caso anterior,

$$M \models \exists! x \varphi(x, \vec{a}) \Leftrightarrow N \models \exists! x \varphi(x, \vec{a}),$$

y por tanto $M \models \exists! x \varphi(x, \vec{a})$ y $N \models \varphi(b, \vec{a})$, de modo que $b \in \mathrm{dcl}_M(A)$. $\square$

Lema 5.8 (Ver Kaye 1991 [4], ejer. 8.1)**.** *Sea $L \supseteq L_{PA}$, y $M \models T \supseteq PA$ (con el axioma de inducción para cada fórmula de L). Existe una L_{PA}-fórmula $\varphi(\vec{x})$ que define los números definibles en M sii $M = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$.*

Prueba. Si $M = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$, claramente cada elemento de M es definible, y por tanto $x = x$ es una L_{PA}-fórmula que define los elementos definibles.

A la inversa, sea $\varphi(x) \in L_{PA}$ una fórmula que define los elementos definibles de M, es decir, supongamos que $\varphi(M) = \{a \in M : M \models \varphi(a)\} = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$; queremos ver que $M = \varphi(M)$. Si existiese $x \in M \setminus \varphi(M)$, sería $M \models \exists x \neg\varphi(x)$, y por el principio del número mínimo (LNP), habría un menor número no definible:

$$M \models \exists x \neg\varphi(x) \wedge \forall y(\neg\varphi(y) \to x \leq y);$$

pero entonces ese número sería definible, precisamente por la fórmula recién escrita, lo que es una contradicción. □

5.2 Aplicaciones elementales

Definición 5.9 (Aplicaciones elementales)**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, y $M, N \models T$. Sea $A \subseteq M$ un subconjunto, y consideremos una aplicación $f : A \to N$. Diremos que f **es elemental** sii para cada L-fórmula $\varphi(\vec{x})$ y para cada $\vec{a} \in A$,*

$$M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\vec{a})). \tag{2}$$

Observación 5.10. *Todas las aplicaciones elementales son inyectivas: en efecto, si $a_1, a_2 \in A$ y $a_1 \neq a_2$, entonces $M \models a_1 \neq a_2$, de donde $N \models f(a_1) \neq f(a_2)$, y por tanto $f(a_1) \neq f(a_2)$.*

Lema 5.11. *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría y $M \models T$. Consideremos $A \subseteq M$ un subconjunto. Para cada modelo N, $f : A \to N$ es elemental sii $(M, a)_{a\in A} \equiv (N, f(a))_{a\in A}$.*

Prueba. Sea $L' = L \cup A$ el lenguaje con nuevas constantes para todos los elementos de A. Entonces, $(M, a)_{a\in A} \equiv (N, f(a))_{a\in A}$, sii para cada L'-sentencia φ,

$$M \models \varphi \Leftrightarrow N \models \varphi,$$

sii para cada $\vec{a} \in A$ y cada L-fórmula $\varphi(\vec{x})$,

$$M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(f(\vec{a})),$$

sii f es elemental. □

Lema 5.12. *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría y $M, N \models T$. Sea $A \subseteq M$ un subconjunto, y consideremos una aplicación $f : A \to N$. Si f es elemental, entonces $M \equiv N$.*

Prueba. Es inmediato, ya que (2) implica que, para todas las sentencias φ,

$$M \models \varphi \Leftrightarrow N \models \varphi.$$

□

Lema 5.13. *Sea $L \supseteq L_{PA}$, $T \supseteq PA$ una L-teoría (que incluya el axioma de inducción para cada fórmula de L), y sean $M, N \models T$ tales que $A \subseteq M$, $A \subseteq N$, y $M_A \equiv N_A$. Entonces* $\mathrm{dcl}_M(A) \cong_A \mathrm{dcl}_N(A)$ *(es decir, existe un isomorfismo $f : \mathrm{dcl}_M(A) \to \mathrm{dcl}_N(A)$ tal que $f \upharpoonright A = \mathrm{Id}_A$).*

Prueba. Por el lema B.13, si $M_A \equiv N_A$ existen $M'_A \succcurlyeq M_A$ y $N'_A \succcurlyeq N_A$ tales que $M'_A \cong N'_A$; sea pues $f : M'_A \cong N'_A$ un isomorfismo. Aplicando el lema 5.7, $\mathrm{dcl}_M(A) = \mathrm{dcl}_{M'}(A)$ y $\mathrm{dcl}_N(A) = \mathrm{dcl}_{N'}(A)$ y, por tanto, basta ver que $f[\mathrm{dcl}_{M'}(A)] = \mathrm{dcl}_{N'}(A)$, ya que la restricción de un isomorfismo a una subestructura elemental siempre es un isomorfismo.

De hecho, alcanza con demostrar que $f[\mathrm{dcl}_{M'}(A)] \subseteq \mathrm{dcl}_{N'}(A)$ (por simetría, si tuviésemos que $f^{-1}[\mathrm{dcl}_{N'}(A)] \subseteq \mathrm{dcl}_{M'}(A)$, aplicando f a ambos lados, inmediatamente $\mathrm{dcl}_{N'}(A) \subseteq f[\mathrm{dcl}_{M'}(A)]$).

Tomemos pues $a \in \mathrm{dcl}_{M'}(A)$; debemos comprobar que $f(a) \in \mathrm{dcl}_{N'}(A)$. Por definición de clausura definible, sabemos que hay una fórmula $\varphi(x, y_1, ..., y_n) \in L$ y constantes $a_1, ..., a_n \in A$ tales que $M' \models \varphi(a, a_1, ..., a_n)$ y además $M' \models \exists! x\varphi(x, a_1, ..., a_n)$. De modo que tiene que ser $f(a_i) = a_i$ para cada $i = 1, ..., n$, ya que $f \upharpoonright A = \mathrm{Id}_A$. Por tanto, $N' \models \varphi(f(a), a_1, ..., a_n)$ y además $N' \models \exists! x\varphi(x, a_1, ..., a_n)$ y entonces claramente $f(a) \in \mathrm{dcl}_{N'}(A)$. □

5.3 Modelos primos

Definición 5.14 (Modelos primos)**.** *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría y $M \models T$. Sea $A \subseteq M$ un subconjunto. Diremos que M* ***es primo sobre*** *A sii para cada modelo $N \models T$ y cada aplicación $f : A \to N$ elemental, existe una inmersión elemental $\bar{f} : M \to N$ que extiende a f: $f \subseteq \bar{f}$.*

M es ***primo*** *sii es primo sobre $\emptyset$.*

Lema 5.15. *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría y $M \models T$. Si $A \subseteq M$ es un subconjunto, entonces M es primo sobre A sii para cada modelo $N \supseteq A$ tal que $M_A \equiv N_A$ hay una aplicación elemental $f : M \to N$ tal que $f \upharpoonright A = Id_A$.*

Prueba. $\Rightarrow$) Supongamos que M es primo sobre A, y sea $N \supseteq A$ tal que $M_A \equiv N_A$. Por el lema 5.11, $\mathrm{Id}_A : A \to N$ es elemental; y, por ser M primo sobre A, existe una extensión $f : M \to N$ elemental de Id_A.

$\Leftarrow$) Supongamos que para cada modelo $N \supseteq A$ tal que $M_A \equiv N_A$ existe una aplicación elemental $f : M \to N$ tal que $f \upharpoonright A = \mathrm{Id}_A$. Debemos probar que M es primo sobre A, es decir, que toda aplicación $f : A \to N$ elemental puede extenderse a una aplicación elemental $j : M \to N$ con $j \supseteq f$.

Consideremos A y $M \supseteq A$, por un lado, y $f[A]$ y $N \supseteq f[A]$, por otro. Para evitar problemas con los elementos comunes, elijamos un X con $|X| = |N \setminus f[A]$ tal que $X \cap M = \emptyset$ y de tal modo que X contenga un elemento para cada elemento de $N \setminus f[A]$. Es trivial ahora construir una aplicación $f' : A \cup X \to N$ que extienda a f. Es igualmente sencillo ver que $A \cup X$ es el universo de una L-estructura N', y que $f : N' \to N$ es un isomorfismo. Pero ahora $N' \supseteq A$ y $M_A \equiv N'_A \equiv N_{f[A]}$, y aplicando la hipótesis, hay un $g : M \to N'$ elemental tal que $g \upharpoonright A = \mathrm{Id}_A$. Finalmente, basta con componer $j = f' \circ g$ para tener la aplicación elemental buscada. □

Lema 5.16. *Sea $L \supseteq L_{PA}$, $T \supseteq PA$ una L-teoría (que incluya en axioma de inducción para cada fórmula de L), y $M \models T$. Si $A \subseteq M$ es un subconjunto de M,*

$$\mathrm{dcl}_M(A) \text{ es primo sobre } A.$$

Prueba. Aplicaremos el lema 5.15: hagamos $M' = \mathrm{dcl}_M(A)$; $A \subseteq M'$; si $N \supseteq A$ es tal que $M'_A \equiv N_A$, por el lema 5.13 existe un isomorfismo

$$f : \mathrm{dcl}_{M'}(A) \cong_A \mathrm{dcl}_N(A);$$

tal que $f \restriction A = \mathrm{Id}_A$, y $\mathrm{dcl}_{\mathrm{dcl}_M(A)}(A) = \mathrm{dcl}_M(A)$ y cada isomorfismo es elemental. □

Lema 5.17 (Ver Kaye 1991 [4], cor. 8.3)**.** *Sea $L \supseteq L_{PA}$, $T \supseteq PA$ una L-teoría (con el axioma de inducción para cada fórmula de L) y $M \models T$. Entonces $\mathrm{dcl}_M(A)$ es A-*minimal*, es decir, no existe $N \precneqq \mathrm{dcl}_M(A)$ con $A \subseteq N$.*

Prueba. Por el lema 5.5, $\mathrm{dcl}_N(A) \preccurlyeq N$; y si fuese $A \subseteq N \precneqq \mathrm{dcl}_M(A)$, por el lema 5.7 sería $\mathrm{dcl}_N(A) = \mathrm{dcl}_M(A)$; pero entonces

$$\mathrm{dcl}_M(A) = \mathrm{dcl}_N(A) \preccurlyeq N \precneqq \mathrm{dcl}_M(A),$$

lo que es absurdo. □

Lema 5.18. *Sea L un lenguaje arbitrario, T una L-teoría, y $M \models T$. Entonces $\mathrm{dcl}_M(A)$ es A-*rígido*, es decir, no tiene automorfismos no triviales.*

Prueba. Aplicando el lema 5.13, hay un automorfismo f de $\mathrm{dcl}_M(A)$ que es la identidad sobre A; claramente, ese automorfismo debe ser único; pero como la identidad sobre $\mathrm{dcl}_M(A)$ es ella misma un automorfismo, el único automorfismo es la identidad. □

Nótese que si $M \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$, entonces $\mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ es el modelo estándar $\mathbb{N}$, ya que $\mathbb{N} \models \mathrm{Th}(\mathbb{N})$ y no tiene subestructuras propias.

5.4 Tipos

Definición 5.19 (Tipos)**.** *Sea M un modelo de una teoría T en un lenguaje L, y $A \subseteq M$ un subconjunto. Decimos que un conjunto $p(\vec{x})$ de fórmulas de $L(A)$ en las variables $\vec{x}$ es un* ***tipo sobre** A **en (el modelo)** M **en (las variables)** $\vec{x}$ *si $p(\vec{x}) \cup \mathrm{Th}(M_A)$ es consistente.*

El siguiente lema prueba que podríamos haber dado una definición equivalente:

Lema 5.20. *Sea M un modelo de una teoría T en un lenguaje L, $A \subseteq M$ un subconjunto. Entonces $p(\vec{x}) \subseteq \mathrm{Fm}(L(A))$ es un tipo sobre A en M sii $p(\vec{x})$ es finitamente satisfacible en M_A.*

Prueba. (Consistente ⇒ finitamente satisfacible) Supongamos que $p(\vec{x})$ no es finitamente satisfacible en M_A; entonces existe un número finito de fórmulas, o, lo que es lo mismo, tomando su conjunción, una fórmula $\varphi(\vec{x}) \in p(\vec{x})$ tal que $M_A \models \neg\exists\vec{x}\varphi(\vec{x})$, Aplicando la hipótesis, $\{\varphi(\vec{x}\} \cup \mathrm{Th}(M_A)$ es satisfacible, y por tanto existe un modelo $N_A \models \text{Th}(M_A)$, con $\vec{a} \in N_A$ y $N_A \models \varphi(\vec{a})$. De este modo, $N_A \models \exists \vec{x} \varphi(x)$ y a la vez $N_A \equiv M_A$, lo que es absurdo.

(Finitamente satisfacible $\Rightarrow$ Consistente) Inversamente, si $p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_A)$ es inconsistente, como $\text{Th}(M_A)$ es consistente y completa, la inconsistencia tiene que "'venir de" $p(\vec{x})$, es decir, hay una prueba finita de lo falso a partir de un subconjunto finito $\Gamma \subseteq p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_A)$, y $\Gamma \cap p(\vec{x}) \neq \emptyset$. Por tanto $\Gamma' = \Gamma \cap p(\vec{x})$ no puede ser satisfacible, y $p(\vec{x})$ no es finitamente satisfacible. $\square$

Lema 5.21. *En la definición 5.19, podríamos haber substituido "$p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_A)$ es consistente" por "$p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_M)$ es consistente".*

Prueba. Si $p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_A)$ es consistente, cada fórmula de $p(\vec{x})$ se realiza en M_A: si para cada $a \in M$ fuese $M_A \models \neg\varphi(a)$, sería también $M_A \models \forall z \neg\varphi(z)$, y entonces $\forall z \neg\varphi(z) \in \text{Th}(M_A)$ mientras que $\varphi(z) \in p(\vec{x})$, lo que es absurdo.

Si cada fórmula de $p(\vec{x})$ se realiza en M_A, es inmediato que también se realiza en su expansión M_M.

Finalmente, si cada fórmula de $p(\vec{x})$ se realiza en M_M, por compacidad, $p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_M)$ es consistente. $\square$

Definición 5.22 (Tipos completos)**.** *Un tipo $p(\vec{x})$ sobre A en M en las variables $\vec{x}$ es **completo** sii para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in L(A)$, o bien $\varphi(\vec{x}) \in p(\vec{x})$, o bien $\neg\varphi(\vec{x}) \in p(\vec{x})$.*

Lema 5.23. *Sea $p(\vec{x})$ un tipo sobre A en M. Entonces existe $N \succcurlyeq M$ y una tupla $\vec{a} \in N$ tal que $N \models p(\vec{a})$. Mejor: existe $N \succcurlyeq M$ donde todo tipo en cualquier número finito de variables se realiza.*

Prueba. Como por el lema 5.21 $p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M_M)$ es consistente, hay un modelo N' en el lenguaje $L(M)$ y una tupla $\vec{a} \in N'$ tales que $N' \models \text{Th}(M_M)$ y además $N' \models p(\vec{a})$. Pero entonces la restricción N de N' a L es claramente una extensión elemental de M con la propiedad buscada. $\square$

Definición 5.24 (Tipos de una teoría)**.** *Sea T una teoría en un lenguaje L. Decimos que $p(\vec{x})$ es **un tipo de T en (las variables) $\vec{x}$ (sobre $\emptyset$)** si $p(\vec{x})$ es un tipo (sobre $\emptyset$) en un modelo M de T.*

El siguiente lema muestra una definición equivalente.

Lema 5.25. *Sea T una teoría en un lenguaje L; entonces $p(\vec{x})$ es un tipo de T en $\vec{x}$ sii $p(\vec{x})$ es un conjunto de fórmulas consistente con T.*

Prueba. $\Rightarrow$) Inmediato: como $p(\vec{x})$ es un tipo sobre $\emptyset$ en un $M \models T$, por la definición 5.19, $p(\vec{x}) \cup \text{Th}(M)$ es consistente, y como $T \subseteq \text{Th}(M)$ también lo es $p(\vec{x}) \cup T$.

$\Leftarrow$) Si $p(\vec{x})$ es consistente con T, entonces $T \cup p(\vec{x})$ tiene modelos. Sea $M \models T \cup p(\vec{x})$; en particular, $M \models T$, y también $M \models p(\vec{x})$, y por tanto existe una tupla $\vec{a} \in M$ tal que $M \models p(\vec{a})$. Aplicando el lema 5.20, $p(\vec{x})$ es un tipo sobre $\emptyset$ en M, y por la definición 5.24, $p(\vec{x})$ es un tipo de T en $\vec{x}$. $\square$

Definición 5.26 (Tipos en un modelo)**.** *Sea M un modelo, $A \subseteq M$ un subconjunto de M y $\vec{a} \in M$ una tupla. El **tipo** en M de $\vec{a}$ sobre A es*

$$tp_M(\vec{a}/A) = \{\varphi(\vec{x}) \in L(A) : M \models \varphi(\vec{a})\}.$$

Si $A = \emptyset$, escribimos $tp_M(\vec{a}) = tp_M(\vec{a}/\emptyset)$.

Lema 5.27. *Si $p(\vec{x})$ es un tipo completo de M sobre A, existe $M' \succcurlyeq M$ y $\vec{a} = a_1, ..., a_n \in M$ tales que $p(\vec{x}) = tp_{M'}(\vec{a}/A)$.*

Prueba. Aplicando el lema 5.23. □

Definición 5.28 (Tipos completos de una teoría)**.** *Sea $p(\vec{x})$ un tipo de una teoría T. Decimos que $p(\vec{x})$ es un **tipo completo de** T sii $T \cup p(\vec{x})$ es una teoría completa, esto es, si para cada fórmula $\varphi(\vec{x})$, $T \cup p(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ o $T \cup p(\vec{x}) \vdash \neg\varphi(\vec{x})$.*

Se impone ahora verificar que nuestra nomenclatura es consistente, esto es, que los tipos completos (sobre A en un modelo M) definidos en 5.22 son los mismos que los definidos en 5.28. Pero esto es claro, ya que son los tipos completos sobre $T' = \mathrm{Th}(M_A) = T(A)$.

Lema 5.29. *Sea $\vec{a} \in M \models T$. Entonces $tp_M(\vec{a})$ es un tipo completo de T.*

Prueba. Para cada fórmula $\varphi(\vec{x})$, o bien $M \models \varphi(\vec{a})$, y entonces $T \cup tp_M(\vec{a}) \vdash \varphi(\vec{x})$ porque $\varphi(\vec{x}) \in tp_M(\vec{a})$, o bien $M \models \neg\varphi(\vec{a})$, y entonces $T \cup tp_M(\vec{a}) \vdash \neg\varphi(\vec{x})$. □

Definición 5.30 (Realización y omisión de tipos)**.** *Sea T una teoría, $M \models T$, $A \subseteq M$ un subconjunto, y $p(\vec{x})$ un tipo sobre A en M. Decimos que una tupla $\vec{a} \in M$ **realiza** $p(\vec{x})$, o que $\vec{a}$ **es una realización de** p, sii $M_A \models p(\vec{a})$, y cuando tanto A como M se sobreentienden, escribimos $\vec{a} \models p$. Si en M no hay ninguna realización de $p(\vec{x})$, diremos que M **omite** $p(\vec{x})$.*

Es claro que si $M \models p(\vec{a})$ y $p(\vec{x})$ es completo, entonces $p(\vec{x}) = tp_M(\vec{a})$.

Definición 5.31 (Tipos aislados)**.** *Sea $A \subseteq M$, $\vec{a} \in M \models T$. Diremos que $p(\vec{x})$ es **aislado sobre** A sii es generado por una sola fórmula, es decir, si existe una fórmula $\varphi(\vec{x}) \in p(\vec{x})$ tal que $p(\vec{x}) = \langle\varphi(\vec{x})\rangle_{M_A}$, esto es, si*

$$p(\vec{x}) = \{\psi(\vec{x}) \in L(A) : Th(M_A) \models \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})\}.$$

Igualmente, si $p(\vec{x})$ es un tipo de una teoría T, diremos que $p(\vec{x})$ es aislado cuando existe una fórmula $\varphi(\vec{x})$ tal que $T \vdash \exists x\varphi(\vec{x})$ y $T \vdash \forall\vec{x}(\varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x}))$ para cada $\psi(\vec{x}) \in p(\vec{x})$.

Observación 5.32. *Si $p(\vec{x})$ es aislado en una teoría completa T, entonces $p(\vec{x})$ se realiza en todos los modelos $M \models T$.*

Prueba. Trivialmente: si $p(\vec{x})$ es generado por $\varphi(\vec{x})$, entonces $T \vdash \exists x\varphi(\vec{x})$, y por tanto $M \models \varphi(\vec{a})$ para alguna tupla $\vec{a}$; como además $M \models \varphi(\vec{a}) \to \psi(\vec{a})$, claramente $\vec{a}$ realiza $p(\vec{x})$ (para la tupla $\vec{a}$). □

Definición 5.33 (Tipo conjugado)**.** *Sea M un modelo, $A \subseteq M$ un subconjunto de M, y $f : A \to N$ una aplicación elemental. Entonces el **tipo conjugado** $p^f(\vec{x})$ es el resultado de substituir en cada fórmula de $p(\vec{x})$ los parámetros de A por los correspondientes parámetros de $f[A]$, es decir,*

$$p^f(\vec{x}) = \{\varphi(\vec{x}, f(\vec{a})) : \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \in p(\vec{x})\}.$$

Lema 5.34. *Sean M un modelo, $A \subseteq M$ un subconjunto y $\vec{a} \in M$ una tupla. Si $p(\vec{x})$ es aislado, cualesquiera dos fórmulas que generen el tipo son equivalentes. De este modo, y módulo la equivalencia lógica, es lícito hablar de* la *fórmula que genera a un tipo aislado.*

Prueba. Supongamos que $p(\vec{x}) = \langle\varphi(\vec{x})\rangle_{M_A} = \langle\psi(\vec{x})\rangle_{M_A}$; considerando la tautología $\varphi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x})$, obtenemos $\varphi(\vec{x}) \in \langle\varphi(\vec{x})\rangle_{M_A} = \langle\psi(\vec{x})\rangle_{M_A}$ y por tanto $M_A \models \psi(\vec{x}) \to \varphi(\vec{x})$, y simétricamente. Por tanto, $M_A \models \varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \psi(\vec{x})$. $\square$

Lema 5.35. *El conjugado de un tipo aislado es también aislado: sea $tp_M(\vec{a}/A)$ un tipo, y sea $f : A \to N$ una aplicación elemental; si $tp_M(\vec{a}/A)$ es aislado, también su conjugado $tp^f_M(\vec{a}/A)$ es aislado.*

Prueba. Sea $\varphi(\vec{x})$ la formula que genera $tp_M(\vec{a}/A)$, y sea $\psi(\vec{x}) \in tp_M(\vec{a}/A)$. Como $Th(M_A) \models \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x})$ y f es elemental, también

$$Th(N_{f[A]}) \models \varphi(\vec{x}) \to \psi(\vec{x}),$$

y por tanto $\varphi(\vec{x})$ genera $tp_N(f(\vec{a})/f[A]) = tp^f_M(\vec{a}/A)$. $\square$

Lema 5.36. *Sea M un modelo y $A \subseteq M$ un subconjunto. Si $\vec{b} \in dcl_M(A)$, entonces su tipo sobre A es aislado, es decir,*

$$tp_M(\vec{b}/A) \textit{ es aislado.}$$

Prueba. Como $\vec{b} \in \mathrm{dcl}_M(A)$, hay una tupla $\vec{a} \in A$ y una L_{PA}-fórmula $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ tales que $M \models \exists!\vec{x}\varphi(\vec{x}, \vec{a})$ y $M \models \varphi(\vec{b}, \vec{a})$.

Cada elemento de $tp_M(\vec{b}/A)$ es una $L(A)$-fórmula $\psi(\vec{x})$ tal que $M \models \psi(\vec{b})$.

Si $M \models \psi(\vec{b})$, entonces también $M \models \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \to \psi(\vec{x})$, ya que tanto el antecedente como el consecuente se satisfacen para $\vec{x} = \vec{b}$, y el antecedente es falso en otro caso; y si $M \models \varphi(\vec{x}, \vec{a}) \to \psi(\vec{x})$, como también $M \models \exists!\vec{x}\varphi(\vec{x}, \vec{a})$ y $M \models \varphi(\vec{b}, \vec{a})$, entonces forzosamente $M \models \psi(\vec{b})$. $\square$

5.5 Modelos atómicos

Definición 5.37 (Modelos atómicos)**.** *Sea M un modelo, y sea $A \subseteq M$ un subconjunto. Decimos que M es **atómico sobre** A cuando para cada $\vec{a} \in M$, $tp_M(\vec{a}/A)$ es aislado sobre A.*

Observación 5.38. *Es inmediato a partir del lema 5.36 que* $\mathrm{dcl}_M(A)$ *es atómico sobre A.*

Lema 5.39. *Sean M un modelo y $A \subseteq M$ un subconjunto, y supongamos que M es atómico sobre A y que $B \subseteq M$ es un subconjunto finito. Entonces M es atómico sobre $A \cup B$.*

Prueba. Sea $\vec{b}$ una tupla que enumera B, y $\vec{a} \in M$ una tupla arbitraria. Entonces $\vec{a}, \vec{b}$ es una tupla de elementos de M; como M es atómico sobre A, $tp_M(\vec{a}, \vec{b}/A)$ es aislado sobre A, y, en virtud del lema 5.34, está generado por una fórmula $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

Si $\psi(\vec{x}) \in tp_M(\vec{a}/A \cup B)$, entonces $\psi(\vec{x}) \in L(A \cup B)$ y $M \models \psi(\vec{a})$; o, haciendo aparecer las constantes de B, $M \models \psi(\vec{a}, \vec{b})$; por tanto, $\psi(\vec{x}, \vec{y}) \in tp_M(\vec{a}, \vec{b}/A)$, de donde

$$Th(M_A) \models \varphi(\vec{x}, \vec{y}) \to \psi(\vec{x}, \vec{y})$$

y en particular $Th(M_A) \models \varphi(\vec{x}, \vec{b}) \to \psi(\vec{x}, \vec{b})$, es decir,

$$Th(M_{AB}) \models \varphi(\vec{x}, \vec{b}) \to \psi(\vec{x}),$$

y $tp_M(\vec{a}/A \cup B)$ está generado por $\varphi(\vec{x}, \vec{b})$. $\square$

Lema 5.40. *Sea L un lenguaje arbitrario, M un modelo, $A \subseteq M$ un subconjunto arbitrario, y supongamos que M es atómico sobre A, y que $|M \setminus A| \leq \omega$. Entonces M es primo sobre A.*

Prueba. Sea $M \setminus A = \{a_i : i \in \omega\}$ una enumeración de $M \setminus A$, y sea $f : A \to N$ una aplicación elemental; para ver que M es primo sobre A, debemos extender f a una aplicación $f \subseteq \bar{f} : M \to N$.

Para ello construimos una cadena de aplicaciones elementales parciales f_i, con $f_0 = f$ y $\mathrm{dom} f_i = A \cup \{a_j : j < i\}$. Para cada i, $tp_M(a_i/\mathrm{dom} f_i)$ es aislado, y por tanto $tp_M^{f_i}(a_i/\mathrm{dom} f_i)$ es también aislado y se realiza en N; sea b una tal realización; entonces $f_{i+1} = f_i \cup \{\langle a_i, b\rangle\}$ es elemental. Finalmente, $\bar{f} = \bigcup_{n\in\omega} f_i$ es una inmersión elemental de M en N que extiende a f. □

Lema 5.41 (Relaciones primo-atómico)**.** *Si $|M| \leq \aleph_0$ y $|L| \leq \aleph_0$,*

$$M \textit{ es primo sobre } A \Leftrightarrow M \textit{ es atómico sobre } A.$$

Prueba. Primo $\Rightarrow$ Atómico) Por el teorema de omisión de tipos (OTT). Sea $\vec{a} \in M$ una tupla: queremos ver que $\mathrm{tp}(\vec{a}/A)$ es aislado sobre A. Para ello, y en busca de una contradicción, supongamos que no es así. Aplicando el OTT, sabemos que existe un modelo N_A tal que $N_A \equiv M_A$ y p se omite en N_A. Por ser M primo sobre A, existe una aplicación elemental $f : M \to N$ con $f \restriction A = \mathrm{Id}_A$ que realiza p en N.

Atómico $\Rightarrow$ Primo) Queremos demostrar que si $M \supseteq A$, $N \supseteq A$, $M_A \equiv N_A$, $M \setminus A$ y $N \setminus A$ son numerables, y M y N son atómicos sobre A, entonces $M \simeq_A N$:

Pongamos $M \setminus A = \{a_n : n \in \omega\}$, $N \setminus A = \{b_n : n \in \omega\}$. Queremos ver que exite una secuencia de funciones $\langle f_n : n \in \omega\rangle$, con $f_n : A_n \to B_n$. $f_n \restriction A = \mathrm{Id}_A$, $A \subseteq A_n \subseteq M$, $B_n \subseteq N$, donde $A_n \setminus A$ es finito, $f_n \subseteq f_{n+1}$, $a_n \in \mathrm{dom}(f_{n+1})$ y $b_n \in \mathrm{ran}(f_{n+1})$.

Si puedo encontrar las f_n, entonces $f = \bigcup_{n\in\omega} f_n$ será la $f : M \simeq_A N$ buscada.

Hagamos pues $f_0 = \mathrm{Id}_A$. Dado f_n, como M es atómico sobre A y $A_n \setminus A$ es finito, M es atómico sobre A_n, por lo que $\mathrm{tp}(a_n/A_n)$ es aislado, y por tanto existe una fórmula $\varphi(x) \in \mathrm{tp}(a_n/A_n)$ tal que φ aisla $\mathrm{tp}(a_n/A_n)$.

La fórmula $\varphi(x)$ será de la forma $\varphi(x, \vec{a})$, con $\vec{a} \in A_n$, donde $\varphi(x, \vec{y}) \in L$. Entonces $\varphi(x, f_n(\vec{a})) \in L(B_n)$ aisla un tipo sobre B_n. Sea $c_n \models q(x)$, donde $q(x) = \mathrm{tp}(a_n/A_n)^{f_n}$; entonces $g_n = f_n \cup \langle a_n, c_n\rangle$ es elemental. De un modo inverso se construye b_n. □

Lema 5.42. *Si $A \subseteq M$ y $M = \mathrm{dcl}_M(A)$, entonces*

0) M es atómico sobre A;

1) M es primo sobre A;

2) M es minimal sobre A;

3) Salvo isomorfía sobre A, M es el único modelo primo sobre A.

Prueba. 0) Aplicando el lema 5.36, para cada $\vec{b} \in \mathrm{dcl}_M(A) = M$ es $tp_M(\vec{b}/A)$ aislado.

1) Lema 5.16.

2) Lema 5.17.

3) Sea $f : N \to M$ una aplicación elemental tal que $f \restriction A = \mathrm{Id}_A$. Claramente, $A \subseteq f[N] \preccurlyeq M$; pero entonces, por minimalidad, $f[N] = M$. □

Teorema 5.43. *Sea L un lenguaje numerable, T una L-teoría, y $M, N \models T$ primos sobre $A \subseteq M, N$. Supongamos además que $|A| \leq \aleph_0$; entonces $M \cong_A N$.*

Prueba. En primer lugar, observamos que M y N tienen que ser numerables, ya que son inmersibles en cualquier modelo que contenga a A, en particular en uno numerable, y las inmersiones son inyectivas. Por tanto, aplicando el lema 5.41, M y N son atómicos.

Enumeremos $M \setminus A = \{a_n : n < \omega\}$, y $N \setminus A = \{b_n : n < \omega\}$. Procederemos de un modo similar al de la demostración del lema 5.40, pero en dos direcciones. Existe una secuencia $\{f_i : i < \omega\}$ de aplicaciones elementales parciales construidas del siguiente modo: $f_0 = \mathrm{Id}_A$; para cada i, $\mathrm{dom} f_i \supseteq A$ y $\mathrm{dom} f_i \setminus A$ es finito, e igualmente $\mathrm{rec} f_i \supseteq A$ y $\mathrm{rec} f_i \setminus A$ es finito; hacemos $f_i \cup \{\langle a_i, b \rangle\} = g_i$, y $g_i^{-1} \cup \{\langle b_i, c \rangle\} = h_i$; entonces $f_{i+1} = h_i^{-1}$. $\square$

6 Extensiones finales

En esta sección, sea $L \supseteq L_{PA}$ un lenguaje no necesariamente numerable, y sea $T \supseteq PA$ (con el axioma de inducción para cada fórmula de L) una teoría completa en el lenguaje L. Para cualquier $M \models T$, sea $M_0 = \mathrm{dcl}_M(\emptyset)$ el modelo primo de T; por el lema 5.18, este modelo es único salvo isomorfismos. Fijemos un tal M_0; por el lema 5.5, $M_0 \preccurlyeq M$.

Utilizaremos la siguiente variación del Teorema de Ramsey (ver Pillay [7] y también Paris [6]):

Teorema 6.1 (Paris [6], lema 1.1)**.** *Sea $M \models PA$, $I = \{a \in M : M \models \varphi(a)\}$ cofinal en M, y $\psi(x_1, ..., x_n, y)$ una fórmula de L_{PA}. Entonces existe una fórmula $\theta(w, z)$ tal que, si denotamos $\theta(w, M) = \{c \in M : \theta(w, c)\}$,*

1) Si $a \in M$, entonces $\theta(a, M)$ es un subconjunto cofinal de I y es un conjunto de indiscernibles para $\psi(x_1, ..., x_n, a)$ en M, y

2) Si $M \models a < b$, entonces $\theta(a, M) \supseteq \theta(b, M)$.

Del teorema se deriva de modo casi inmediato la siguiente proposición:

Proposición 6.2. *Sean $M \models PA$ e $I = \{a \in M : M \models \varphi(a)\}$ cofinal en M. Entonces, si $n < \omega$ y E_0, E_1 es una partición definible de $[I]^n$, hay un $X \subseteq I$, cofinal y definible, tal que $[X]^n \subseteq E_i$ para $i = 0$ o $i = 1$.*

Prueba. Supongamos que la partición está definida por la relación de equivalencia $E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$, es decir, $E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ es verdadera si y sólo si todos los x_i son distintos, todos los y_i son distintos, y tanto $\langle x_1, ..., x_n\rangle$ como $\langle y_1, ..., y_n\rangle$ estan a los dos en E_0 o los dos en E_1.

Para cada $y_1, .., y_n \in M$, sea $y = \langle y_1, ..., y_n\rangle$, y definamos $\psi(x_1, ..., x_n, y) = E(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$. Aplicando el teorema anterior, existe una fórmula $\theta(w, z)$ con las propiedades 1) y 2). Pero ahora basta con escoger $a = \langle a_1, ..., a_n\rangle$, donde los a_i son elementos de I arbitrarios pero distintos, y poner $X = \theta(a, M)$ para obtener el resultado esperado. □

Definición 6.3. *Sea $M \models T$, consideremos un tipo completo $p(x) \in S(M)$, y escojamos un modelo $N \succcurlyeq M$ y un elemento $a \in N$ que realice p: $N \models p(a)$. Definiremos*

$$M(p) =_{\mathrm{def}} \mathrm{dcl}_N(M \cup \{a\}).$$

Lema 6.4. *$M(p)$ está bien definido, es decir: si $M \preccurlyeq N \models p(a)$ y $M \preccurlyeq N' \models p(a')$, entonces $\mathrm{dcl}_N(M \cup \{a\}) \cong_M \mathrm{dcl}_{N'}(M \cup \{a'\})$.*

Prueba. Sea $p(x) \in S(M)$ un tipo completo, y supongamos que

$$M \preccurlyeq N \ni a$$

y

$$M \preccurlyeq N' \ni a',$$

de modo tal que $a \models p$ y $a' \models p$. Entonces $\mathrm{tp}_N(a/M) = \mathrm{tp}_{N'}(a'/M)$, y por tanto $f = \mathrm{Id}_M \cup \{\langle a, a'\rangle\}$ es elemental,

$$Ma \xrightarrow{f} Ma' \subseteq N',$$

y hay una única $g : \mathrm{dcl}_N(Ma) \to N'$ con $f \subseteq g$. Basta ahora con demostrar que $g(\mathrm{dcl}_N(Ma)) = \mathrm{dcl}_{N'}(Ma')$ para ver que g es el isomorfismo buscado. □

Lema 6.5. $M \preccurlyeq M(p)$

Prueba. Por el lema 5.4, $M \cup \{a\} \subseteq M(p)$, y por tanto $M \subseteq M(p)$; por el 5.5, $M(p) \preccurlyeq N$. Así, $M \subseteq M(p) \preccurlyeq N$, de donde $M \preccurlyeq N$, y por tanto $M \preccurlyeq M(p)$. □

Definición 6.6. *Sea $M \models T$ y $p(x) \in S(M)$ un tipo. Diremos que $p(x)$ es* ***cofinal*** *sii "$m < x$" $\in p(x)$ para cada $m \in M$.*

Definición 6.7. *Sea $p(x) \in S(M_0)$ un tipo completo. Diremos que $p(x)$ es un tipo* ***de extensión final*** *sii a) es cofinal, y b) si $M \models T$ y $p'(x) \in S(M)$ es cofinal tal que $p \subseteq p'$, entonces $M \preccurlyeq_{\mathrm{e}} M(p')$.*

Definición 6.8. *Un tipo $p(x) \in S(M_0)$ es* ***definible*** *(sobre $A \subseteq M_0$) sii para cada fórmula $\varphi(x, \vec{y}) \in L$ existe otra fórmula $\psi(\vec{y}) \in L(A)$ tal que*

$$\forall \vec{a} \in M_0\ [\varphi(x, \vec{a}) \in p(x) \Leftrightarrow M_0 \models \psi(\vec{a})];$$

dicho de otro modo, sii $\{\vec{a} \in M_0 : \varphi(x, \vec{a}) \in p(x)\} \subseteq M_0$ es definible sobre A.

Definición 6.9. *Un tipo $p(x) \in S(M_0)$ es un* ***tipo de extensión definible*** *sii $p(x)$ es cofinal y para cada modelo $M \succcurlyeq M_0$ y cada $p'(x) \in S(M)$ tal que $p \subseteq p'$, si p' es cofinal entonces p' es definible.*

Definición 6.10. *Sea $M \models T$, y $M \preccurlyeq K$. Decimos que K es una* ***extensión conservativa de*** *M sii para cada $\vec{b} \in K$ y cada L-fórmula $\theta(\vec{u}, \vec{v})$ hay un $\vec{a} \in M$ y $\psi(\vec{u}, \vec{w})$ tales que*

$$\theta(K, \vec{b}) \cap M = \psi(M, \vec{a}),$$

es decir, cada relación de M que es definible en K ya era definible en M.

Lema 6.11. *Sea $M \models T$ y $M \preccurlyeq K$. Si K es una extensión conservativa de M, entonces también es una extensión final.*

Prueba. Supongamos, en bueca de una contradicción, que hay un $b \in K \setminus M$ con $b < a \in M$. Entonces $\{x \in M : x < b\} = \{x \in K : K \models x < b\} \cap M$ es un corte en M, y por ser K una extensión conservativa, ese corte es definible en M; pero esto es imposible, ya que los cortes nunca son definibles. □

Lema 6.12. *Sea $L \supseteq L_{PA}$, T una L-teoría con $T \supseteq PA$ (con el axioma de inducción para cada fórmula de L), $M \models T$, y $p(x) \in S(M)$. Entonces p es definible sii $N = M(p)$ es una extensión conservativa de M.*

Prueba. $\Rightarrow$) $M(p)$ es primo sobre $M \cup \{a\}$ con $a \models p$. Sean $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) \in L$ y $\vec{b} \in M(p)$; debemos encontrar $\psi(\vec{x}, \vec{z}) \in L$ ($z = z_1, ..., z_n$) y $\vec{c} \in M$ tales que $\varphi(N, \vec{b}) \cap M = \psi(M, \vec{c})$. Sin perder generalidad, podemos escoger $\vec{b} = a, b_1, ..., b_m$, con $b_1, ..., b_m \in M$:

$$\vec{b} \in \mathrm{dcl}_{M(p)}(M \cup \{a\}).$$

Si suponemos que $p(v) = \mathrm{tp}(a/M)$ es definible, y

$$\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{x}, v, y_1, ..., y_m),$$

entonces hay una fórmula $\psi(\vec{x}, y_1, ..., y_m) \in L(M)$ tal que $\forall \vec{e}, e_1, ..., e_m \in M$, $\varphi(\vec{e}, v, e_1, ..., e_n) \in p(v) \Leftrightarrow M \models \psi(\vec{e}, e_1, ..., e_m)$. En particular, $\forall \vec{e} \in M$,

$$\varphi(\vec{e}, v, b_1, ..., b_m) \in p(v) \Leftrightarrow M \models \psi(\vec{e}, b_1, ..., b_m),$$

y por tanto

$$N \models \varphi(\vec{e}, a, b_1, ..., b_m) \Leftrightarrow M \models \psi(\vec{e}, b_1, ..., b_m),$$

es decir,

$$\vec{e} \in \varphi(M, \vec{b}) \cap M^n \Leftrightarrow \vec{e} \in \psi(M, b_1, ..., b_m).$$

$\Leftarrow$) Si $M \preccurlyeq M(p)$ es una extensión conservativa, sea $\varphi(x, \vec{y}) \in L$. Entonces, $\{\vec{b} \in M : \varphi(x, \vec{b}) \in p\} = \varphi(a, N) \cap M^n = \psi(M)$ para una fórmula $\psi(\vec{y}) \in L(M)$, es decir: $\forall \vec{b} \in M$,

$$\varphi(x, \vec{b}) \in M(p) \Leftrightarrow M \models \psi(\vec{b}).$$

□

Proposición 6.13. *Supongamos que L es numerable. Entonces existe un tipo $p(x) \in S(M_0)$ de extensión definible.*

Prueba. Consideremos las fórmulas de L (o de $L(M_0)$: es lo mismo, ya que todos los elementos de M_0 son definibles sobre el vacío) de la forma $\varphi(u, x)$, y fijemos una enumeración $\langle \varphi_n(u, x) \rangle_{n \in \omega}$. Definimos una secuencia $\langle X_n \rangle_{n \in \omega}$ de subconjuntos de M_0 cofinales y definibles tales que:
a) $X_n \supseteq X_{n+1}$, y
b) para cada n y cada $a \in M_0$, hay un $a' \in M_9$ tal que:
o bien $M_0 \models \forall x > a'(x \in X_{n+1} \to \varphi_n(a, x))$,
o bien $M_0 \models \forall x > a'(x \in X_{n+1} \to \neg\varphi_n(a, x))$.

Empecemos haciendo $X_0 = M_0$ (el universo de M_0). Supongamos ahora que X_n ya ha sido definido; mostraremos cómo definir X_{n+1}: definimos la siguiente partición en $[X_n]^3$: para cada $a < b < c$, con $a, b, c, \in X_n$, hacemos

$$\begin{array}{ll} \{a, b, c\} \in E_0, & \text{si } M_0 \models (\forall u < a)(\varphi_n(u, b) \leftrightarrow \varphi_n(u, c)), \text{ y} \\ \{a, b, c\} \in E_1 & \text{en caso contrario.} \end{array}$$

Aplicando la proposición 6.2, y como esta partición es definible y $M_0 \models PA$, hay un $X \subseteq X_n$ cofinal y definible tal que $[X]^3 \subseteq E_0$ o $[X]^3 \subseteq E_1$.

Afirmación: $[X]^3 \subseteq E_0$.

Prueba. Supongamos, en busca de una contradicción, que $[X]^3 \subseteq E_1$. Fijemos $a \in X$; para cada $b \in X \cap (> a)$, sea $Y_b = \{u < a : M_0 \models \varphi_n(u, b)\}$. Y_b es definible, y por tanto Y_b está codificado por un único $y_b < 2^a$ en M_0. Ahora definamos $f :< 2^a \to M_0$ como sigue: $f(y) =$ el mínimo $b \in X \cap (> a)$ tal que $y = y_b$, si existe un tal b, y $f(y) = 0$ en otro caso. Como $M_0 \models PA$ y f es definible, $ran(f)$ está acotado (esta es la "semiregularidad" de M_0). X es cofinal, de modo que podemos elegir $c \in X$, $c > a$ y $c > ran(f)$. Ahora $f(y_c) \in X$ y $a < f(y_c) < c$. Sea $f(y_c) = b$. Entonces es $Y_c = Y_b$, es decir, para cada $u < a$, $M_0 \models \varphi_n(u, b) \leftrightarrow \varphi_n(u, c)$. pero esto contradice el hecho de que $\{a, b, c\} \in E_1$. □

Por tanto, $[X]^3 \subseteq E_0$; hagamos pues $X_{n+1} = X$. Entonces $X_{n+1} \subseteq X_n$, y X_{n+1} es cofinal (en M_0). Ahora sea $d \in M_0$. Como X_{n+1} es cofinal, hay un $a \in X_{n+1}$, $a > d$. Está claro, dado que $[X_{n+1}]^3 \subseteq E_0$, que para cada $b \in X_{n+1}$ tal que $b > a$ es $M_0 \models \varphi(d, b)$, o bien para cada tal $b \in X_{n+1}$

es $M_0 \models \neg\varphi_(d,b)$. De este modo se cumple la segunda condición, lo que hace posible nuestra construcción.

Sea ahora $p(x) = \{x \in X_n : n \in \omega\} \cup \{x > a : a \in M_0\}$. p es claramente cofinal y consistente. Además, es completo: consideremos $\varphi(a,x)$, con $a \in M_0$ (como las secuencias finitas en M_0 se codifican en elementos de M_0, es suficiente examinar dichas fórmulas). Entonces, φ es $\varphi_n(u,x)$ para algún N. De este modo, si para algún $a' \in M_0$ es $(x > a' \wedge x \in X_{n+1}) \to \varphi_n(a,x))$, entonces $p(x) \vdash \varphi_n(a,x)$, si para algún $a' \in M_0$ es $(x > a' \wedge x \in X_{n+1}) \to \neg\varphi_n(a,x))$, entonces $p(x) \vdash \neg\varphi_n(a,x)$. Como sólo una de estas posibilidades se realiza, p es completo.

Nótese que para cada $n < \omega$ hay un f_n definible tal que

$$\begin{array}{rll} M_0 & \models (\forall u)(& \forall x(x > f_n(u) \wedge x \in X_{n+1} \to \varphi_n(u,x)) \\ & \qquad \vee & \forall x(x > f_n(u) \wedge x \in X_{n+1} \to \neg\varphi_n(u,x)) \\ & \quad) & \end{array} \qquad (*)$$

(Basta con coger como $f_n(u)$ el menor a').

Ahora sean $M_0 \preccurlyeq M$, $p' \in S(M)$, $p \subseteq p'$ y p' cofinal. Entonces $(x \in X_n) \in p'$ para cada $n < \omega$. De modo que por (*) y la cofinalidad de p', p' es definible, es decir, para $a \in M$,

$$\varphi_n(u,x) \in p' \text{ sii } M \models (\exists x > f_n(a))(x \in X_{n+1} \wedge \varphi_n(a,x)).$$

Pero ya sabemos que un tipo cofinal definible determina una extensión final, $M(p') \supseteq_{\mathrm{e}} M$. Y, por tanto, p es de extensión final. □

Proposición 6.14. *Si existe un tipo $p(x) \in S(M_0)$ de extensión definible, entonces para cada $M \succcurlyeq M_0$ existe $N \succcurlyeq M$ propia (es decir, $N \neq M$) y conservativa.*

Prueba. Con vistas a demostrar este resultado, consideremos $T = \mathrm{Th}(M)$, $M_0 \preccurlyeq M$ y $p(x) \in S(M_0)$. Veremos que $\exists p'(x) \in S(M)$ con $p \subseteq p'$ y p' cofinal (que será automáticamente definible por definición). Es claro que $p(x) \cup \{x > m : m \in M\}$ es consistente. En caso contrario, habría un $m \in M$ tal que

$$Th(M_{M_0 m}) \cup p(x) \vdash x \leq m.$$

Consideremos ahora $q(y) = tp(m/M_0)$; entonces

$$Th(M_{M_0}) \cup p(x) \cup q(y) \vdash x \leq y;$$

por compacidad, hay una fórmula $\varphi(y) \in q(y)$ tal que

$$Th(M_{M_0}) \cup p(x) \vdash (\varphi(y) \to x \leq y);$$

pero en $M_0 \models \exists y \varphi(y)$, y por tanto hay un $u \in M_0$ tal que $M_0 \models \varphi(u)$, de donde $p(x) \vdash x \leq u$.

Sea ahora $N = M(p')$. Como p' es cofinal, $N \succ M$ es propia; y por el lema 6.12, es conservativa. □

A Demostraciones de algunos de los axiomas redundantes de PA

A.1 A3

Lema A.1. (A1) + (A2) + $Ind \to x + 0 = 0 + x$.

Prueba. Por una parte, $0+0 = 0$; por otra, si suponemos que $x+0 = 0+x$, como $x+0 = x$ por A1, $0+x = x$. Entonces $Sx+0 = Sx$ por A1, y $0+Sx = S(0+x)$ por A2, de donde $0+Sx = Sx = Sx+0$ y por tanto para cualquier x, $x+0 = 0+x$. □

Lema A.2. (A1) + (A2) + $Ind \to x + Sy = Sx + y$.

Prueba. Si $y = 0$, entonces $x + S0 = S(x + 0) = Sx = Sx + 0$; y si suponemos que para un cierto y y cualquier x es $x + Sy = Sx + y$, entonces $Sx + Sy = S(Sx + y) = S(x + Sy) = x + SSy$. □

Proposición A.3. (A1) + (A2) + $Ind \to$ (A3).

Prueba. Si $y = 0$, aplicamos el lema A.1. Supongamos ahora que, para un y fijado y cualquier x, es $x + y = y + x$: entonces, $x + Sy = S(x + y)$ por A2, y como $x + y = y + x$ por hipótesis inductiva, $x + Sy = S(y + x) = y + Sx$; por el lema A.2, $y + Sx = Sy + x$; y por tanto, $x + Sy = Sy + x$. □

A.2 A4

Proposición A.4. (A1) + (A2) + $Ind \to$ (A4).

Prueba. $x+(y+0) = x+y$ por A1, e igualmente $(x+y)+0 = x+y$ por A1, y por tanto $x + (y + 0) = (x + y) + 0$. Supongamos ahora que $x + (y + z) = (x + y) + z$ para un cierto x y cualesquiera x e y. Entonces $x + (y + Sz) = x + S(y + z) = S(x+(y+z)) = S((x+y)+z) = (x+y)+Sz$ por A2 y la hipótesis inductiva. □

A.3 D1

Proposición A.5. (A1) + (A2) + (P1) + (P2) + $Ind \to$ (D1).

Prueba. $x \cdot (y + 0) = x \cdot y$ por A1, $x \cdot 0 = 0$ por P1, $x \cdot y = x \cdot y + 0$ por A1, y por tanto $x \cdot (y + 0) = x \cdot y + x \cdot 0$.

Supongamos ahora que para un z determinado y cualesquiera x e y es $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$. Entonces $x \cdot (y + Sz) = x \cdot S(y + z) = x \cdot (y + z) + x$ por P2, y aplicando la hipótesis inductiva, $x \cdot (y + Sz) = (x \cdot y + x \cdot z) + x$. Por A4, $x \cdot (y + Sz) = x \cdot y + (x \cdot z + x)$, y por P2 $x \cdot (y + Sz) = x \cdot y + x \cdot Sz$. □

Lema A.6. (A1) + (P1) + (P2) + $Ind \to x \cdot 0 = 0 \cdot x$.

Prueba. Si $x = 0$, la propiedad se cumple trivialmente; supongamos que para un determinado x es $x \cdot 0 = 0 \cdot x$; entonces $Sx \cdot 0 = 0$ por P1, y $0 \cdot Sx = 0 \cdot x + 0$ por P2, y por hipótesis inductiva $0 \cdot Sx = x \cdot 0 + 0$, $0 \cdot Sx = x \cdot 0$ por A1, y $0 \cdot Sx = 0$ por P1. □

Lema A.7. (A1) + (A2) + (P1) + (P2) + $Ind \to Sx \cdot y = x \cdot y + y$.

Prueba. Si $y = 0$, entonces $Sx \cdot 0 = 0$ por P1, $x \cdot 0 = 0$ también por P1, y $0 + 0 = 0$ por A1.

Supongamos ahora que para un y determinado y cualquier x es $Sx \cdot y = x \cdot y + y$. Entonces $Sx \cdot Sy = Sx \cdot y + Sx$ por P2, $Sx \cdot Sy = (x \cdot y + y) + Sx$ por hipótesis inductiva, $Sx \cdot Sy = x \cdot y + (y + Sx)$ por A4, $Sx \cdot Sy = x \cdot y + (Sy + x)$ por el lema A.2, $Sx \cdot Sy = (x \cdot y + x) + Sy$ por A3 y A4, y finalmente $Sx \cdot Sy = x \cdot Sy + Sy$ por P2. □

Proposición A.8. $(\mathrm{A1}) + (\mathrm{A2}) + (\mathrm{P1}) + (\mathrm{P2}) + Ind \to (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$.

Prueba. Si $y = 0$, entonces $(x + 0) \cdot z = x \cdot z = x \cdot z + 0$ por A1, y por el lema A.6 $(x + 0) \cdot z = x \cdot z + 0 \cdot z$.

Supongamos ahora que para un y determinado y cualesquiera x y z es $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Entonces $(x + Sy) \cdot z = S(x + y) \cdot z$, $(x + Sy) \cdot z = (x + y) \cdot z + z$ por el lema A.7, $(x + Sy) \cdot z = (x \cdot z + y \cdot z) + z = x \cdot z + (y \cdot z + z) = x \cdot z + Sy \cdot z$ por hipótesis inductiva, A4 y P2. □

A.4 P3

Lema A.9. $(\mathrm{A1}) + (\mathrm{A2}) + (\mathrm{P1}) + (\mathrm{P2}) + Ind \to x = S0 \cdot x$.

Prueba. Por el lema A.7, $S0 \cdot x = 0 \cdot x + x$, y por el lema A.6, $0 \cdot x = 0$, de modo que aplicando A3 y A1 es $S0 \cdot x = x$. □

Proposición A.10. $(\mathrm{A1}) + (\mathrm{A2}) + (\mathrm{P1}) + (\mathrm{P2}) + Ind \to P3$.

Prueba. Probaremos que $x \cdot y = y \cdot x$ por inducción en y; el caso $y = 0$ está cubierto por el lema A.6; supongamos ahora que para un y determinado y cualquier x, $x \cdot y = y \cdot x$; entonces $x \cdot Sy = x \cdot y + x$ por P2, y aplicando la hipótesis inductiva y el lema A.9, $x \cdot Sy = y \cdot x + S0 \cdot x$. Por el lema A.8, $x \cdot Sy = (y + S0) \cdot x$, y por A2 y A1, $x \cdot Sy = Sy \cdot x$. □

A.5 P4

Proposición A.11. $(\mathrm{A1}) + (\mathrm{A2}) + (\mathrm{P1}) + (\mathrm{P2}) + Ind \to P4$.

Prueba. Para $z = 0$, $x \cdot (y \cdot 0) = x \cdot 0 = 0 = (x \cdot y) \cdot 0$ por P1. Supongamos ahora que para un z determinado y cualesquiera x e y es $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$. Entonces $x \cdot (y \cdot Sz) = x \cdot (y \cdot z + y) = x \cdot (y \cdot z) + x \cdot y = (x \cdot y) \cdot z + x \cdot y = (x \cdot y) \cdot Sz$ por P2, D1, hipótesis inductiva, y otra vez P2. □

A.6 El orden y S

Lema A.12. *Las opciones en O3 son mutuamente excluyentes.*

Prueba. Supongamos que $x = y$. Si fuese también $x < y$ sería $x < x$, lo que está prohibido por O2; por la misma razón, no puede ser $y < x$.

Supongamos ahora que $x < y$. Si fuese $y < x$, por O1 sería $x < x$, prohibido por O2, e igualmente si fuese $y = x$. □

Lema A.13. *Suponiendo inducción, todo $x \neq 0$ tiene anterior:* $x = 0 \vee \exists y (x = Sy)$.

Prueba. Si $x = 0$, la fórmula se verifica inmediatamente. Supongamos ahora que $x \neq 0$, es decir, que hay un y tal que $x = Sy$; entonces $Sx = SSy = S(Sy) = Sz$, con $z = Sy$. $\square$

A.7 S1

Proposición A.14. (O1) + (O2) + (O3) + (O5) + (O6) $\rightarrow$ (S1).

Prueba. Como $Sx > x$ por O5 y por O6 $x = 0 \vee 0 < x$, o bien $0 < x < Sx$ y $0 < Sx$ por O1, de donde $0 \neq Sx$ por O3, O1 y O2, o bien $0 = x < Sx$, de donde directamente $0 < Sx$, y aplicamos el mismo argumento. $\square$

A.8 S2

Proposición A.15. (O1) + (O2) + (O4) $\rightarrow$ (S2).

Prueba. Si $Sx = Sy$ no se da $Sx < Sy$, con lo que por O4 $\neg(x < y)$; simétricamente, $\neg(y < x)$. Aplicando O3, $x = y$. $\square$

A.9 O6

Proposición A.16. (O1) + (O5) + $Ind \rightarrow$ (O6).

Prueba. Si $x = 0$, O6 se verifica trivialmente. Supongamos ahora que para un determinado $x \neq 0$ es $0 < x$; por O5, $x < Sx$, y por O1 $0 < Sx$. $\square$

A.10 O7

Lema A.17. (O1) + (O4) + (O5) + $Ind \rightarrow \neg(0 < y < S0)$

Prueba. Para $y = 0$ se cumple trivialmente. Si ahora suponemos que $\neg(0 < y < S0)$ e $y \neq 0$, entonces $\neg(y < S0)$ por O6, y por tanto o bien $S0 = y$, en cuyo caso $S0 < SS0 = Sy$ por O4, o bien $S0 < y$, en cuyo caso $S0 < SS0 < Sy$ por O5 y también por O4. De este modo, $\neg(0 < Sy < S0)$. $\square$

Proposición A.18. (O1) + (O4) + (O5) + (O6) + $Ind \rightarrow O7$

Prueba. Supongamos que para un cierto x y cualquier y es $x < y \rightarrow (Sx = y \vee Sx < y)$. Si fuese $Sx < y < SSx$, o bien $y = 0$, lo que es imposible por O6, o bien $y = Sz$, en cuyo caso $Sx < Sz < SSx$, de donde $x < z < Sx$, lo que contradice la hipótesis inductiva. $\square$

B Nociones elementales de teoría de modelos

Definición B.1 (Homomorfismo, homorfismo estricto)**.** *Sean M, N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que una función $f : M \to N$ es un **homomorfismo** si*

1. *$f(c^M) = c^N$ para cada constante $c \in L$.*
2. *$f(F^M(a_1, ..., a_n)) = F^N(f(a_1), ..., f(a_n))$ para cada símbolo de función n-ádico $F \in L$ y cada tupla $a_1, ..., a_n$ de M.*
3. *Si $a_1, ..., a_n \in R^M$, entonces $f(a_1), ..., f(a_n) \in R^N$ para cada símbolo de relación n-ario $R \in L$ y cada tupla $a_1, ..., a_n$ de M.*

*Decimos que el homomorfismo es **estricto** si además*

4. *$a_1, ..., a_n \in R^M$ si y sólo si $f(a_1), ..., f(a_n) \in R^N$ para cada símbolo de relación n-ario $R \in L$ y cada tupla $a_1, ..., a_n$ de M.*

Definición B.2 (Subestructura)**.** *Sean M, N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que M es una **subestructura** de N, y escribimos $M \subseteq N$, sii*

1) el dominio de M es un subconjunto del dominio de N
2) que contiene las constantes de N
3) cerrado bajo las funciones de N,
4) y cada símbolo no-lógico de L se interpreta en M de acuerdo a la restricción de su interpretación en M.

Definición B.3 (Inmersión)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que una función $f : M \to N$ es una **inmersión de** M **en** N, y escribimos $f : M \underset{\sim}{\subseteq} N$, si f es un homomorfismo estricto inyectivo de M en N, y que M es **inmersible** en N, escrito $M \underset{\sim}{\subseteq} N$, si existe una inmersión $f : M \underset{\sim}{\subseteq} N$.*

Definición B.4 (Isomorfismo)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que una función $f : M \to N$ es un **isomorfismo de** M **en** N, y escribimos $f : M \cong N$, si f es una inmersión exhaustiva de M en N, y que M y N son **isomorfos**, escrito $M \cong N$, si existe un isomorfismo $f : M \cong N$.*

Lema B.5 (Inmersiones y subestructuras)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L.*

(1) M es inmersible en N si y sólo si M es isomorfo a una subestructura de N:

$$M \underset{\sim}{\subseteq} N \text{ si y sólo si existe } N' \subseteq N \text{ tal que } M \cong N'.$$

(2) M es inmersible en N si y sólo si N es isomorfo a una extensión de M:

$$M \underset{\sim}{\subseteq} N \text{ si y sólo si existe } N' \supseteq M \text{ tal que } N \cong N'.$$

Definición B.6 (Subestructura elemental)**.** *Sean M, N modelos de un lenguaje de primer orden L, y sea Γ un conjunto de fórmulas de L. Decimos que M es una **Γ-subestructura elemental** de N, y escribimos $M \preccurlyeq_\Gamma N$, sii $M \subseteq N$, y para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in \Gamma$ y cada $\vec{a} \in M$,*

$$M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\vec{a}).$$

*En caso de que $\Gamma = Fm(L)$ suprimiremos Γ de nuestra notación (es decir, escribiremos $M \preccurlyeq N$, y diremos que M es una **subestructura elemental** de N).*

Definición B.7 (Inmersión elemental)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que una función $f : M \to N$ es una **inmersión elemental de** M **en** N si f es una inmersión y para cada fórmula $\varphi(\vec{x}) \in$* $\mathrm{Fm}(L)$ *y cada tupla $\vec{a} \in M$,*

$$M \models \varphi(\vec{a}) \Leftrightarrow N \models \varphi(\vec{a});$$

*decimos también que M **es elementalmente inmersible en** N, y escribimos $M \precsim N$.*

Lema B.8 (Inmersiones elementales y subestructuras elementales)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L.*

(1) M es elementalmente inmersible en N si y sólo si M es isomorfo a una subestructura elemental de N:

$$M \precsim N \textit{ si y sólo si existe } N' \preccurlyeq N \textit{ tal que } M \cong N'.$$

(2) M es elementalmente inmersible en N si y sólo si N es isomorfo a una extensión elemental de N:

$$M \precsim N \textit{ si y sólo si existe } N' \succcurlyeq M \textit{ tal que } N \cong N'.$$

Prueba. (1) Inmediato.

(2) Tomemos un conjunto X de tal modo que $|X| = |N \setminus f[M]|$ y $X \cap M = \emptyset$, y fijemos $h : X \to N \setminus f[M]$ biyectiva. Definiremos N' de modo que su universo sea $X \cup M$. Deseamos que $g = h \cup f$ sea un isomorfismo. Para cada constante $c \in L$, $c^{N'} = g^{-1}(c^N)$; para cada relación n-aria $R \in L$, $R^{N'} = \{(a_1, ..., a_n) \in N' : (g(a_1), ..., g(a_n)) \in R^N\}$; y para cada símbolo de función n-aria y cada $a_1, ..., a_n \in N'$, $f^{N'}(a_1, ..., a_n) = g^{-1}(f^N(g(a_1), ..., g(a_n)))$. De este modo, $g : N \cong N'$ es un isomorfismo y $f \subseteq g$, y así resulta que g es la f' que estábamos buscando. □

Lema B.9. *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L, y sea*

$$L(M) = L \cup \{c_a : a \in M\},$$

donde, para cada $a \in M$, c_a es una constante nueva, y además si $a \neq b$ entonces $c_a \neq c_b$. Entonces $M \precsim N$ si y sólo si hay una expansión $(Nb_a)_{a \in M}$ de N en $L(M)$, donde c_a se interpreta como b_a para cada $a \in M$, de modo que

$$(Nb_a)_{a \in M} \models \mathrm{Th}(M_a)_{a \in M},$$

o, lo que es lo mismo,

$$(Nb_a)_{a \in M} \equiv (Ma)_{a \in M}.$$

Prueba. Tómese $f : M \precsim N$ definido por $a \mapsto b_a$. □

Lema B.10 (Test de Tarski)**.** *Sea M un modelo de un lenguaje de primer orden L, y $A \subseteq M$ un subconjunto. Entonces $A \preccurlyeq M$ sii para cada tupla $\vec{a} \in A$ y cada fórmula $\varphi(\vec{x}, y)$,*

$$M \models \exists y \varphi(\vec{a}, y) \Rightarrow \exists b \in A \text{ tal que } M \models \varphi(\vec{a}, b).$$

Nótese que si $A \preccurlyeq M$, por la condición del Test de Tarski automáticamente A es una subestructura de M: si f es una operación n-aria cualquiera y $\vec{a} \in A$ es una n-tupla, entonces $M \models \exists z(z = f(\vec{a}))$, y por tanto hay un $b \in A$ tal que $M \models b = f(\vec{a})$, y A es cerrado bajo f.

Definición B.11 (Equivalencia elemental)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L. Decimos que M y N son **elementalmente equivalentes**, y escribimos $M \equiv N$, si satisfacen las mismas sentencias de L, es decir, si para cada sentencia φ de L,*

$$M \models \varphi \text{ sii } N \models \varphi.$$

Lema B.12 (Dos modelos elementalmente equivalentes son elementalmente inmersibles en un mismo modelo)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L. Entonces existe K tal que $M \precsim K$ y $N \precsim K$.*

Prueba. Escojamos $L(M)$ y $L(N)$:

$$L(M) = L \cup \{c_a : a \in M\}$$

y

$$L(N) = L \cup \{d_c : c \in N\}$$

de modo que si $a, b \in M$, $a \neq b \to c_a \neq c_b$, si $a, b \in N$, $a \neq b \to d_a \neq d_b$, y si $a \in M$ y $b \in N$, $c_a \neq d_b$.

Buscamos un modelo K de $L(M) \cup L(N)$ que satisfaga

$$\Sigma = \mathrm{Th}(Ma)_{a \in M} \cup \mathrm{Th}(Nb)_{b \in N}.$$

Para ver que hay un modelo, tenemos que mostrar que todo subconjunto finito de Σ es satisfacible, en lo que nos auxiliará que $M \equiv N$. De hecho, si Δ es un subconjunto finito de $\mathrm{Th}(Nb)_{b \in N}$, por el lema B.8 hay una expansión de $(Ma)_{a \in M}$ que satisface Δ (además, claro está, de $\mathrm{Th}(Ma)_{a \in M}$).

Sea $\delta = \bigwedge \Delta$, y pongamos $\delta = \delta(d_{b_1}, ..., d_{b_n})$, con $d_{b_1}, ..., d_{b_n} \in N$, $\delta(x_1, ..., x_n) \in L$, y $N \models \delta(b_1, ..., b_n)$. Por tanto,

$$N \models \exists x_1, ..., x_n \delta(x_1, ..., x_n);$$

por $M \equiv N$,

$$M \models \exists x_1, ..., x_n \delta(x_1, ..., x_n),$$

y por tanto hay $e_1, ..., e_n \in M$ tales que $M \models \delta(e_1, ..., e_n)$. Interpretemos $d_{b_1}, ..., d_{b_n}$ como $e_1, ..., e_n$, y así

$$(M, (a)_{a \in M}, e_1, ..., e_n) \models \Delta \cup \mathrm{Th}(Ma)_{a \in M}.$$

$\square$

Lema B.13 (Dos modelos elementalmente equivalentes tienen extensiones elementales isomorfas)**.** *Sean M y N modelos de un lenguaje de primer orden L tales que $M \equiv N$. Entonces existen $M' \succcurlyeq M$ y $N' \succcurlyeq N$ tales que $M' \cong N'$.*

Prueba. Por el lema B.12, hay un K tal que $M \precsim K$ y $N \precsim K$, y por el B.8, existen $K' \succcurlyeq M$ y $K'' \succcurlyeq N$ con $K' \cong K$ y $K'' \cong K$, de lo que se deduce inmediatamente que $K' \cong K''$. $\square$

Referencias

[1] J. Bell y M. Machover. *A course in mathematical logic.* Amsterdam: North-Holland, 1977.

[2] M. Davis. *Hilbert's tenth problem is unsolvable.* Vol. 80. 1973, págs. 233-69.

[3] H. B. Enderton. *A Mathematical Introduction to Logic.* San Diego: Academic Press, 1972.

[4] R. Kaye. *Models of Peano Arithmetic.* Oxford Logic Guides. Oxford: Clarendon Press, 1991.

[5] Y. I. Manin. *A course in mathematical logic.* Vol. 53. Graduate texts in mathematics. Berlin: Springer-Verlag, 1977.

[6] J. B. Paris. "On models of arithmetic". En: *Conference in Mathematical Logic – London '70.* Ed. por Wilfrid Hodges. Berlin: Springer-Verlag, 1972, págs. 251-80.

[7] A. Pillay. "Partition properties and definable types in Peano arithmetic". En: *Model Theory and Arithmetic – Proceedings, 1979/80.* Ed. por C. Berline, K. McAloon y J.-P. Ressayre. Berlin: Springer-Verlag, 1982, págs. 263-9.